０４年　東工大（前期）

戻る

図のように３つの天体が互いの万有引力を受けながら原点Oを中心に一定角速度 ω で同一面上を円運動している。天体１の質量を M，天体２，３の質量を m とする。 その他に天体はないものとする。以下， 天体と一緒に回転している観測者の立場から考察し， 図中の二つの直交する軸 x，y は同じ角速度 ω で回転しているものとする。このように３つの天体が一定角速度で運動するには図の距離 a，b，c 間にある関係式が満足されていなければならない。万有引力定数を G とする。 以下の設問に答えよ。答に天体１と天体２の距離 $L=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$ を用いてよい。

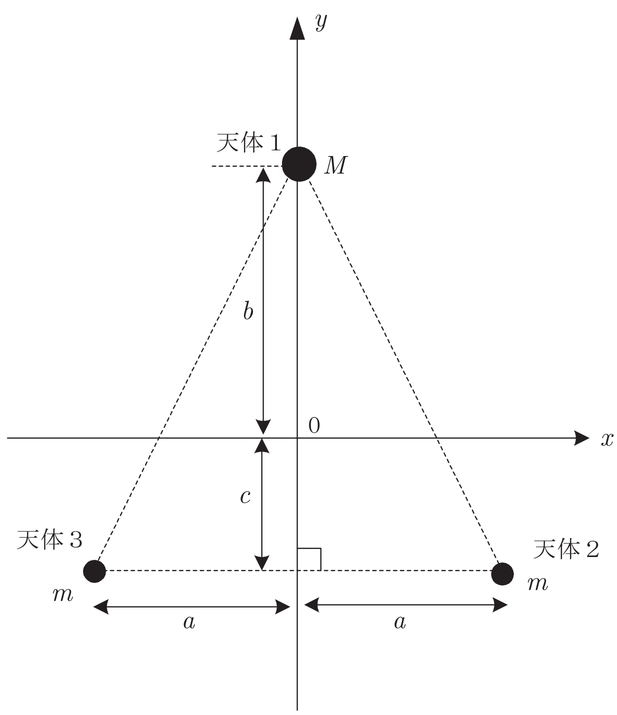
(a)　各々の天体間に働く万有引力と， それぞれの天体の遠心力の向きを図中に示し， それらの大きさを記入せよ。

(b)　各々の天体での力のつり合いの式を x 軸方向と y 軸方向に分解して書け。

(c)　回転の中心Oが３つの天体の重心になっていることを示せ。

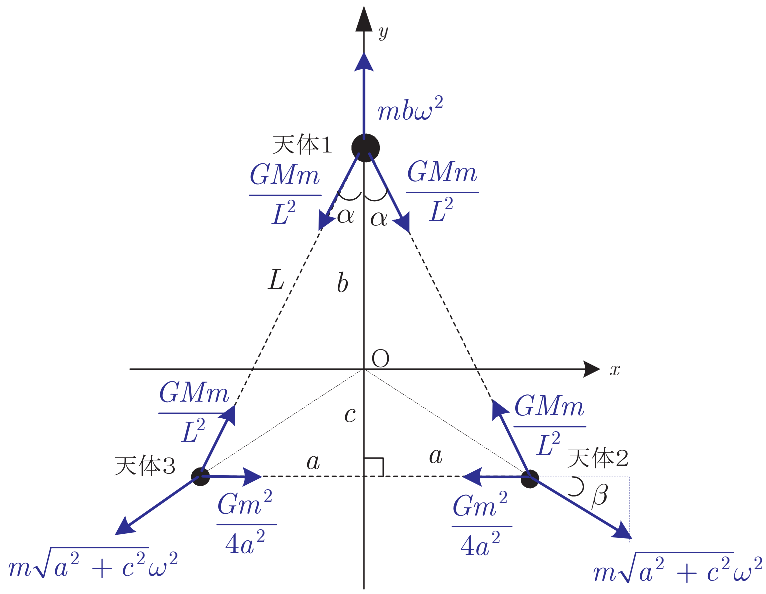
(d)　３つの天体の位置が正三角形の頂点にあることを示せ。

(e)　角速度 ω を G, M，m, a を用いて表せ。



解答・解説

(a)　下図の青い矢印。



(b)　上図を参照して，

天体 1：

$$
\begin{aligned}
x\text{ 方向}: 0 &= G\frac{Mm}{L^2}\sin\alpha - G\frac{Mm}{L^2}\sin\alpha \\
&= G\frac{Mma}{L^3} - G\frac{Mma}{L^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y\text{ 方向}: 0 &= Mb\omega^2 - G\frac{Mm}{L^2}\cos\alpha\times 2 \\
&= Mb\omega^2 - G\frac{Mm(b+c)}{L^3}\times 2\cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

天体２：

$$
\begin{aligned}
x\,\text{方向}:0 &= m\sqrt{a^2+c^2}\,\omega^2\cos\beta - G\frac{m^2}{(2a)^2} - G\frac{Mm}{L^2}\sin\alpha \\
&= ma\omega^2 - G\frac{m^2}{4a^2} - G\frac{Mma}{L^3} \cdots\cdots ② \\
y\,\text{方向}:0 &= G\frac{Mm}{L^2}\cos\alpha - m\sqrt{a^2+c^2}\,\omega^2\sin\beta \\
&= G\frac{Mm(b+c)}{L^3} - mc\omega^2 \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

天体３：

$$
\begin{aligned}
x\,\text{方向}:0 &= -m\sqrt{a^2+c^2}\,\omega^2\cos\beta + G\frac{m^2}{(2a)^2} + G\frac{Mm}{L^2}\sin\alpha \\
&= -ma\omega^2 + G\frac{m^2}{4a^2} + G\frac{Mma}{L^3} \\
y\,\text{方向}:0 &= G\frac{Mm}{L^2}\cos\alpha - m\sqrt{a^2+c^2}\,\omega^2\sin\beta \\
&= G\frac{Mm(b+c)}{L^3} - mc\omega^2
\end{aligned}
$$

(c)　天体１と２の質量はともに m であるから，その重心 G_{23} は両者を結ぶ線分の中点にある。

また ① 式，③ 式より，

$$
\begin{cases}
Mb\omega^2 = \dfrac{GMm(b+c)}{L^3}\times 2 \\[2ex]
mc\omega^2 = \dfrac{GMm(b+c)}{L^3}
\end{cases}
\qquad \therefore \frac{Mb}{mc} = 2 \qquad \therefore \frac{b}{c} = \frac{2m}{M} \cdots\cdots ④
$$

すなわち原点Ｏは，天体１と天体２，３の重心との距離を質量の逆比に内分する点になるので，これは３天体の重心に一致する。

(d)　④ 式より，$b = \dfrac{2m}{M}c$　これを ③ に代入して，

$$
G\frac{Mm(b+c)}{L^3} = G\frac{Mm(2m+M)c}{ML^3} = mc\omega^2 \qquad \therefore \omega^2 = \frac{G(2m+M)}{L^3} \cdots\cdots ⑤
$$

これを ② に代入して，

$$\begin{aligned} 0 &= ma\cdot\frac{G(2m+M)}{L^3} - G\frac{m^2}{4a^2} - G\frac{Mma}{L^3} \\ &= \frac{2Gm^2a}{L^3} - G\frac{m^2}{4a^2} \\ \therefore L &= 2a \end{aligned}$$

よって，３天体は正三角形の頂点にある。

(f)　⑤ 式に $L = 2a$ を代入して，

$$\omega = \sqrt{\frac{G(2m+M)}{L^3}} = \sqrt{\frac{G(2m+M)}{(2a)^3}}$$