数の進化の話（１）

—虚数の受容—

自然数→整数→有理数→実数→複素数という数の進化の話はおなじみだと思います。この矢印は「その数体系に閉じる限り演算が不可能なところを可能にするための拡大」を意味します。たとえば

(1) 自然数→整数は「引き算」を可能とするための拡大。

「$x+5=3$ の解 x は自然数にはないが、それも数の仲間に入れて -2 とするといろいろ都合が良いぞ。それを整数と呼ぼう」

(2) 整数→有理数は「割り算」を可能とするための、あるいは「その数（整数）を係数とする一次方程式を解くため」の拡大。

「$ax+b=0$ は a が b の約数でないと整数解を持たないが、それも数の仲間に入れて $x=-\frac{b}{a}$ とするといろいろ都合が良いぞ。それを有理数と呼ぼう」

(3) 有理数→実数は「その数（有理数）を係数とする二次方程式を解くため」の拡大。

「$ax^2+bx+c=0$ は a、b、c が有理数のとき有理数解を持たないことがあるが、それも数の仲間に入れて $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とするといろいろ都合が良いぞ。これを無理数と呼んで、有理数を含めて実数と呼ぼう。（ただし b^2-4ac が負のときは、グラフ ax^2+bx+c が x 軸と交わらないので、負の数の平方根はないものとしよう。）」

(4) 実数→複素数は、根号中の負数を禁止しないための拡大。

「$b^2-ac<0$ のときも $\sqrt{b^2-ac}$ を $\sqrt{ac-b^2}\sqrt{-1}$ と書いてそれが解であることにしよう。$\sqrt{-1}$ は特別な数で虚数 i としよう。」

というわけです。

さて、(1)〜(3) までの「そうするといろいろ都合が良いぞ」はわかりますが、(4) はどんな都合のいいことがあったのでしょうか？　複素数が意識され始めたのはルネサンス音楽以前の時代ですが、まともな市民権を得たのはバッハやモーツァルトの時代です。（16 世紀とか 18 世紀とか言えばいいのに、私はこの方がわかり良いので $\cdots$ ）ガウスが「複素数まで考えると n 次方程式は常に n 個の根を持つ（重根も数えて）」ことを示しましたが、それだけで「おお、やはり複素数を受け入れなければ」となるのでしょうか？　当時、土地の測量や天文学で二次方程式を解く必要があった場合、複素数解に意味があったわけではなく、実数解にしか興味がなかったはずです。現代でこそ複素数は便利なわけですが、当時にあってどうしてそんなものを受入たのでしょうか？

３次方程式や４次方程式の根の公式があることを知らない人はいないと思いますが、それを使ってみたことがある人は少ないかもしれません。私は野次馬なので「一度は使ってみなければ」と、学生のとき簡単な３次方程式をで作って解いてみたことがあります。それも実根が３つあることが明らかなものを。ところが計算していたら、「負数のルート」が出てくるのです。間違ったかな、と思ってやり直しても、出てくるのです。こうなると頭を抱えて、他のことが手につきません。悩んだ末、これが最終の答でなく計算の途中であることに思い至りました。まさかと思って、最後まで計算してみたら、それは三つの実数になりました。根の公式は正しかったのです (あたりまえ)。

実は、負数のルートが出てくる場合は一カ所でなく二カ所、それも複素共役の足し引きだったり、１の立方根（これも複素数）との積が入ったりします。その結果、最終的に実数になることがあります。二次方程式では、公式の中に負数の平方根があって、最終結果が実

数になることはありませんが、三次方程式では頻繁に起こります。私が適当に選んだ三次方程式が特別というわけではなかったのです。

さてこれでも「負数の平方根」を頑なに拒むとすれば、そこで計算をストップしなければなりません。実根が一つ、あるいは二つ、あるいは三つに応じてちゃんと求まるのに、「そんな方法はインチキだ」と拒絶するのでしょうか？　ここはやはり、「二乗すると負になる数」を受け入れるのが自然でしょう。

その後いろいろ本を紐解き、まさにこれが数学史における「虚数の受容」の経緯だったことを知りました。それにしても 16 世紀、カルダノの時代は「負数」でさえまともに許されておらず、カルダノでさえ、途中で虚数が現れた場合はおろか、最終的に求まった根としても「正」のもののみ採用したようです。

結局上記 (4) の拡大は、歴史を追うとすれば次のように書くべきだったわけですね。

(4) 実数→複素数は、「その数（実数）を係数とする三次方程式を解くため」の拡大。

> 「三次方程式の根の公式には $\sqrt{-1}$ という数が出て来るが、これを形式的に『二乗するとマイナス 1 になる数』と思って計算すると、実数根がちゃんと求まって、良いぞ」

ということで、(1) → (2) → (3) → (4) の進化は

(1) 自然数→整数は「その数（自然数）を含む引き算を解くため」の拡大。
(2) 整数→有理数は「その数（整数）を係数とする一次方程式を解くため」の拡大。
(3) 有理数→実数は「その数（有理数）を係数とする二次方程式を解くため」の拡大。
(4) 実数→複素数は「その数（実数）を係数とする三次方程式を解くため」の拡大。

となって、実に統一感があるのでした。

（ただし 4 次方程式以降は話が違った方向に向かいました。）

[2008 年 8 月 20 日]