数の進化の話（２）

—代数的数とは?—

今度は有理数から実数への矢印の話です。この矢印はもう少し細分できます。代数的数というのをご存じでしょう。「有理数係数の代数関数の根（代数方程式の解）」の集合です。係数全部を通分すれば、「整数係数の代数関数の根」と言っても差し支えありません。代数的でない数は超越数と呼ばれ、e、π、オイラー定数、$2^{\sqrt{2}}$ などがあります。代数的数より超越数の方が圧倒的に高密度です。

一方、「5 次以上の代数関数には根の公式がない」こともよく知られています。より詳しくは「方程式の係数に四則とべき根を有限回ほどこしても根は得られない」というわけです。ここで係数を有理数に限定すると、そのような根は「有理数に四則とべき根を有限回ほどこしても得られない」ことになります。

ということは、代数的数の中に「有限個の有理数に四則とべき根を有限回ほどこして得られる数」ではないものが存在することになります。

「そんな数があるのか? 一体どんな数なのだ？」と言いたくなりませんか？

その前に少し寄り道。

ときに、定規とコンパスで作図できる数というのがあります。基本的に「四則と開平の有限回の操作」で表現できる数になります。自明でない有名な例としては $\sin(\pi/17)$ があります。少年ガウスが朝目覚めたら正 17 角形の作図法が頭の中にできあがっていたというやつです。そこで有理数から実数の間には、

有理数
$\cap$
定規とコンパスで作図できる数
$\cap$
四則とべき根の有限回の操作で有理数から作られる数
$\cap$
代数的数
$\cap$
実数

という包含関係があることになります。いま問題にしているのは、最後から二番目の $\subset$、つまり代数的数の中で「四則とべき根の有限回の操作で有理数から作られない数」とは何ぞや？という話です。

寄り道の二つ目は「5 次以上の方程式が解けないのはなぜか？」の話です。ラグランジュ、ルフィニ、アーベル、ガロアの考え方を追うと、「何らかの変換でその次数以下の方程式およびいくつかの連立一次方程式を解くことに帰着できる」場合に、その方程式は解ける。4 次まではどんな方程式もそうなっているが、5 次以上では一般にそうなっていない」というわけです。（余計ですがより正確には、何らかの変換で「有理係数ではなくなるかもしれないが幸い『有限回べき根的数』を係数」とするその次数以下の方程式に帰着できる云々…これで群論の端緒を築いたのはガロアですが、ショパンの時代ですね。）

さてこれはどういうことか？　「どんなことをしてもその次数以下の方程式およびいくつかの連立方程式を解くことに帰着できない」場合には、計算が閉じない、ということです。

話を戻しましょう。そもそも「四則とべき根の有限回の操作で有理数から作られないような代数的数って一体なに？」という疑問が、なぜわいたかを考えてみましょう。

方程式 $y(x) = 0$ の解の表現を見つけるということは、逆関数 $x(y)$ の表現を求めるということです。だから n 次関数の根の表現が作れたとすれば、その逆関数を数式で表現できたこ

とに他ならないでしょう。その式が n 乗根の表現を含むことは疑いないように思われます。根 x を元の n 次式に代入する— つまり n 乗したり $n-1$ 乗したりして四則計算する— と、0 になるのですから。その証拠に、二次関数の根の公式には、確かに $\sqrt{\quad}$ が出て来ます。

二次関数の根の公式に $\sqrt{\quad}$ が出て来ることは出て来るのですが、注意すべきは $\sqrt{\quad}$ の中にさらに $\sqrt{\quad}$ が出て来たりせず、開平計算は一回だけです。

三次関数の根の公式にも確かに $\sqrt[3]{\quad}$ が出て来ます。ところが $\sqrt[3]{\quad}$ 一発では済まず、その中に $\sqrt{\quad}$ も出て来ます。（前回「負数のルートが出てくる」と言いました。）それ以外にも、最初に二次の項を除いておくなどの複雑な手続きが要ります。

四次関数の根の公式はさらに複雑になり、途中三次方程式を解く必要が出て来ます。もちろんその三次方程式を解くためには、別に二次方程式を解く必要があります。

二次、三次、四次と、根を求める手続きの複雑化は急激に進みます。そして五次方程式になると遂に手続き有限回で済まなくなるというわけです。

そこで逆に「有限回で済まなくなることは、そんなに不自然か?」と考えてみます。いくつかの例を (7) 式まで挙げてみます。

いま、ある有理数の初期値 x から出発して、「その数の 6 倍＋ 1 の平方根を次の数とする数列」を考え、その極限値を x_0 とします。つまり

$$x\,,\quad \sqrt{6x+1}\,,\quad \sqrt{6\sqrt{6x+1}+1}\,,\quad \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6x+1}+1}+1}\,,\cdots \quad = x_0 \tag{1}$$

いま x が適当な値であれば ($-\frac{1}{6} < x \le x_0$)、いい加減な x から出発しても x_0 は一意に $3+\sqrt{10}$ になります。なぜか？上式の無限入れ子構造からわかりますが、x_0 を二乗して 1 を引いて 6 で割ると、x_0 自身になります。つまり x_0 は

$$x^2-6x-1=0 \tag{2}$$

の（正の）根です。(1) 式は平方根とかけ算と足し算だけからなる演算ですが、無限回やっています。それでも、その結果は超越数ではなく、二次方程式 (2) 式の根で、せいぜい有理数と $\sqrt{10}$ から成る程度の、幼い無理数です。種を明かせば (2) を $x^2=6x+1$ と変形してやって、両辺の平方根をとって、逐次的に右辺自身を右辺の中の x に入れてやると (1) 式になります。

では (2.1) 式よりましな数列はないでしょうか？　あります。たとえば $x^2-6x-1=0$ を $(x-1)^2=4x+2$ と変形してやると、

$$x\,,\quad \sqrt{4x+2}+1\,,\quad \sqrt{4\left(\sqrt{4x+2}+1\right)+2}+1\,,\quad \sqrt{4\left(\sqrt{4\left(\sqrt{4x+2}+1\right)+2}+1\right)+2}+1\,,\cdots \quad = x_0 \tag{3}$$

これの方が（初期値 x に依存する部分が $6x+1$ でなく $4x+2$ という点で）収束は (1) より速そうです。どうも $x-1$ としたところが良かったようなので、もう一歩、$(x-2)^2=2x+5$ と変形してやると、

$$x\,,\quad \sqrt{2x+5}+2\,,\quad \sqrt{2\left(\sqrt{2x+5}+2\right)+5}+2\,,\quad \sqrt{2\left(\sqrt{2\left(\sqrt{2x+5}+2\right)+5}+2\right)+5}+2\,,\cdots \quad = x_0 \tag{4}$$

これの方がもっと速そうです。あと一押し、$(x-3)^2=0\cdot x+10$ と変形してやると、

$$x\,,\quad \sqrt{0\cdot x+10}+3\,,\quad \sqrt{10}+3\,,\quad \sqrt{10}+3\,,\cdots \tag{5}$$

と、遂に初期値に初めから依存しなくなって、一発で連鎖が閉じてしまいます。

言いたかったことは次の通りです。方程式 (2) の解は四則と平方根で表すことができ、それも一通りではありません。(1)(3)(4) は無限回使う表現になっています。うまいこと変形すると (5) のように有限回で終わる場合があります。しかし「有限回で終わるか無限回やっているか」は根であるかないかとはもちろん関係なく、どれも「方程式 (2.2) を満たす」ことがすぐ確認できる点では同じです。

無限ついでに

$$x\,,\quad 6+\frac{1}{x}\,,\quad 6+\frac{1}{6+\frac{1}{x}}\,,\quad 6+\frac{1}{6+\frac{1}{6+\frac{1}{x}}}\,,\cdots\quad = x_0 \tag{6}$$

という連分数は、その形からただちに $x_0-6=1/x_0$ つまり方程式 (2) を満たすことがすぐわかります。

上記の方法がどんな代数方程式にも一般化できることは想像つくでしょう。たとえば 5 次方程式 $x^5-6x-1=0$ を考えてみましょう。変形すると $x^5=6x+1 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt[5]{6x+1}$
これより

$$x=\sqrt[5]{6x+1}=\sqrt[5]{6\sqrt[5]{6\sqrt[5]{6\sqrt[5]{6\cdots+1}+1}+1}+1} \tag{7}$$

となります。これが $x^5-1=6x$ を満たすことは目視でも確認できますね。一方この表現を閉じさせようと思ってどんな変形を試みても、5 次以上の方程式の場合は一般にこの種の表現は閉じない、というわけです。（もちろん閉じる場合も、つまり有限回の根号で解ける 5 次以上の方程式も、いくらでもあります。）

つまり代数方程式は、それが何次であっても、「四則とべき根の無限連鎖で表現する」ことを許せば（あるいはべき根はなしにして連分数としても）いつでも解くことができます。そうして得られた解の表現を元の代数方程式に代入して、実際に満たすことを確認することも容易です。こういう世界では代数方程式は「既に完璧に解かれた。解の表現の仕方も無数にある」ということになるでしょう。
「有限回で終わらないより終わる方が絶対いいに決まっているじゃないか」
と言うかもしれません。しかし有限回のべき根演算と言っても、解を十進法で書こうとすれば、べき根に開くときは無限の連鎖計算が必要です。（開平を筆算でやったことがある人もいるでしょう。）

こんな風に発達して来た世界の人たちに突然、
「べき根表現をなるべく有限連鎖で打ち切られるようにできませんかね？」
と訊いたらどうなるでしょう？「なぜそんなことを訊くのだ？」と思いつつ、1000 年くらい考えたあとこう答えるでしょう。
「非常にうまくやると有限で打ち切る表現が見つかる場合が極く稀にあります。特に四次までの代数方程式では必ず見つかります。五次以上だと、ほとんどの場合できませんねえ」

こう考えると「解の表現がある」ことが重要で、それが「連鎖が有限で終わる」ことがたまにあるとしても、「それは良かったね」程度、とも思えて来ます。むしろ、「その数が満たす（整係数の）代数方程式があるかないか?」という性質そのものの方がよっぽど重要に思えます。数列の極限で表される点で同じとしても、$x^5-6x-1=0$ などというかわいい方程式を満たしてしまうことが目視でもわかる (7) 式の数に比べ、どんな代数方程式も満たさない e や π の方が本質的にずっと本格的な無理数という感じがしませんか？

（なんだか勝手に疑問を投げかけておいて、それに答えるというよりは、結局「その質問は重要ですか？」と、イライザみたいなことを言っているようで申しわけないですが。）

[2008 年 8 月 31 日]