

- 1 電車に乗っていると、車両の中央と前端(後端)でつり革の揺れの大きさが違うように思われた。そこで、電車に単振り子をつるしその運動の様子を調べた。

図1のように、全長20メートルの電車の中心線上に前から5メートル間隔に点A, B, C, Dを配置する。これらの点は、それぞれ前端、前車輪、中央、後車輪の位置に対応する。横揺れの大きさを調べるために、電車の中心線に垂直な方向にだけ振動することができるように工夫された同じ単振り子を、点A, B, Cの上につるした。この電車を図2のように、半径100メートルの2つの半円E, Fを点Gで滑らかにつないだ形に水平面上に設置されたレール上を進行させる。この時、点B, Dはこれらの半円上を秒速10メートルで上下振動なしに動くものとする。時刻 $t = 0$ 秒に点Bが点Gを通過するようにして、その前後数秒間のそれぞれの単振り子の運動を調べた。

点B, Dと、レールが作る半円の中心のうち点B, Dに近いほうを結ぶ線は電車の中心線に垂直であるとして、以下の問いに答えよ。途中の計算式等も示し説明すること。

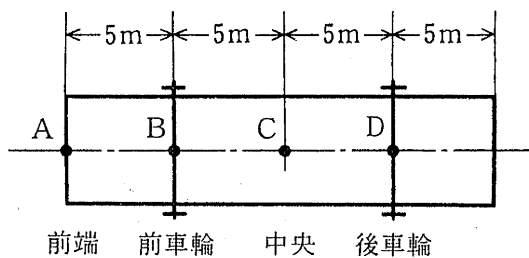


図1.
上から見た電車の模式図と
A, B, C, D点

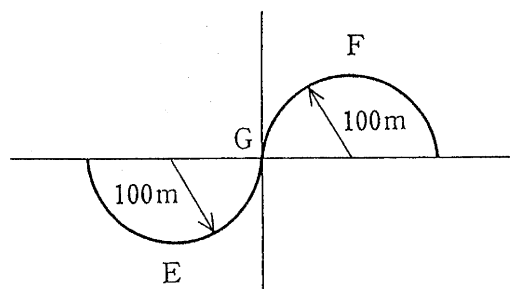


図2.
上から見たレールの模式図

- (1) 実験を始める前、電車が静止していた時の単振り子の周期は 2.0 秒だった。単振り子の糸の長さを求めよ。ただし、重力の加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とする。
- (2) 電車が半円 E 上を進んでいる時の点 B の加速度を求めよ。
- (3) 電車が半円 E 上を進んでいる時、点 B 止の単振り子のおもりは電車上の観測者から見てつりあいの位置に静止していた。鉛直方向からの単振り子のずれの角度を求めよ。
- (4) 図 3 のように、レールのある面の適当な位置に原点 O を定義することにより、点 B の位置は $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$ 、点 D の位置は $\vec{r}_D = \overrightarrow{OD}$ で表されたとする。この時、点 A と点 C の位置を $\vec{r}_B$ 、 $\vec{r}_D$ を用いて表せ。
- (5) 点 B の速度 $\vec{v}_B$ と点 D の速度 $\vec{v}_D$ を用いて、点 A と点 C の速度を表せ。また、点 B の加速度 $\vec{a}_B$ と点 D の加速度 $\vec{a}_D$ を用いて、点 A と点 C の加速度を表せ。
- (6) 点 A, B, C の加速度の、電車の中心線に垂直な成分を、時刻 $t = -1$ 秒から 2 秒までについてそれぞれ図示せよ。ただし、点 D は時刻 $t = 1$ 秒に点 G を通過するとしてよい。
- (7) 時刻 $t = -1$ 秒で電車上の観測者から見て点 A, B, C 上の単振り子のおもりは静止していたとする。その後 $t = 2$ 秒までの、点 A, B, C 上の単振り子の運動の様子を図示せよ。ただし、進行中も単振り子の周期は 2.0 秒としてよい。

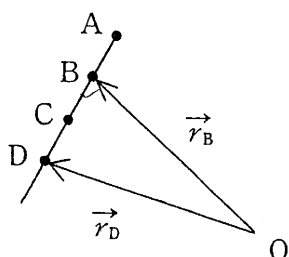


図 3. $\vec{r}_B$, $\vec{r}_D$ の概念図

1 の解答・解説

【解答】

- (1) 求める糸の長さを l とすると、単振り子の周期 T は重力加速度を g として、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ であるから、

$$l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g = \left(\frac{2.0}{2 \times 3.14}\right)^2 \times 9.8 \doteq \underline{\underline{0.99 \text{ [m]}}}$$

- (2) レールの半径を r 、電車の速さを v とすると、点 B の向心加速度 a_B は、

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{100} = \underline{\underline{1.0 \text{ [m/s}^2\text{]}}}$$

- (3) 電車内で見ると、おもりには重力 mg 、糸の張力 S 以外に遠心力が働いているように見える。点 B が半円 E 上を運動しているとき点 B の位置にあるおもりに働く遠心力は進行方向右向きであるから (図 1 参照)、このとき糸が鉛直方向となす角 θ は、おもりに働く力のつり合いを考えて、

$$\tan \theta = \frac{ma_B}{mg} = \frac{a_B}{g} = \frac{1.0}{9.8} \doteq \underline{\underline{0.10}}$$

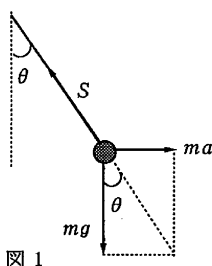


図 1

- (4) 点 A、点 C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{r}_A$ 、 $\vec{r}_C$ とすると、

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{BA} = \vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{DB} = \vec{r}_B + \frac{1}{2}(\vec{r}_B - \vec{r}_D) = \underline{\underline{\frac{3}{2}\vec{r}_B - \frac{1}{2}\vec{r}_D}}$$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_D + \vec{DC} = \vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{DB} = \vec{r}_D + \frac{1}{2}(\vec{r}_B - \vec{r}_D) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r}_D}}$$

- (5) 位置ベクトルを時間微分すると速度を、また速度を時間微分することによって加速度を得る。よって点 A、点 C の速度および加速度をそれぞれ $\vec{v}_A$ 、 $\vec{v}_C$ 、 $\vec{a}_A$ 、 $\vec{a}_C$ とすると、前問の関係より、

$$\vec{v}_A = \frac{3}{2}\vec{v}_B - \frac{1}{2}\vec{v}_D, \quad \vec{v}_C = \frac{1}{2}\vec{v}_B + \frac{1}{2}\vec{v}_D$$

$$\vec{a}_A = \frac{3}{2}\vec{a}_B - \frac{1}{2}\vec{a}_D, \quad \vec{a}_C = \frac{1}{2}\vec{a}_B + \frac{1}{2}\vec{a}_D$$

- (6) 電車は半円Eから半円Fに向かって進む。点Bと点Dはレール上を運動するのでこれらの点における加速度は円運動に伴う向心加速度であり、当然これらの半円の接線に垂直、つまり半径方向である。一方、このとき電車はレール上の2点にまたがっているので、電車の中心線の方法はこれらの半円の接線方向とは一致しない。しかし題意によれば、「点B、点Dと、レールが作る半円の中心のうち点B、点Dに近い方を結ぶ線は電車の中心線に垂直であるとしてよい」ということであるから、点B、点Dの加速度 $\vec{a}_B$ 、 $\vec{a}_D$ はいずれも電車の中心線に垂直であるとみなしてよい。また、点A、点Cの加速度は $\vec{a}_A$ 、 $\vec{a}_C$ は下記に示されるように、いずれも $\vec{a}_B$ 、 $\vec{a}_D$ の和、もしくは差で表されるので、したがって $\vec{a}_A$ 、 $\vec{a}_C$ も電車の中心線に垂直であるとしてよいことになる。

以下、半円Eの中心に向かう向き、つまり進行方向左向きの加速度を正とする。

★ $-1 [\text{秒}] \leq t < 0 [\text{秒}]$: 点Bも点Dも半円E上を運動中ゆえ、

$$\begin{aligned} a_B = a_D = a &= 1.0 [\text{m/s}^2] \\ \therefore a_A &= \frac{3}{2}a_B - \frac{1}{2}a_D = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a = a = 1.0 [\text{m/s}^2] \\ a_C &= \frac{1}{2}a_B + \frac{1}{2}a_D = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a = 1.0 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

★ $0 [\text{秒}] \leq t < 1 [\text{秒}]$: 点Bは半円F上を、点Dは半円E上を運動中である。

$$\begin{aligned} a_B = -a &= -1.0 [\text{m/s}^2], \quad a_D = a \\ \therefore a_A &= \frac{3}{2}a_B - \frac{1}{2}a_D = -\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a = -2a = -2.0 [\text{m/s}^2] \\ a_C &= \frac{1}{2}a_B + \frac{1}{2}a_D = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = 0 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

★ $1 [\text{秒}] \leq t \leq 2 [\text{秒}]$: 点Bも点Dもどもの半円F上を運動中であり、

$$\begin{aligned} a_B = a_D &= -a = -1.0 [\text{m/s}^2] \\ \therefore a_A &= \frac{3}{2}a_B - \frac{1}{2}a_D = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = -a = -1.0 [\text{m/s}^2] \\ a_C &= \frac{1}{2}a_B + \frac{1}{2}a_D = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = -a = -1.0 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

よってグラフは次図のようになる。

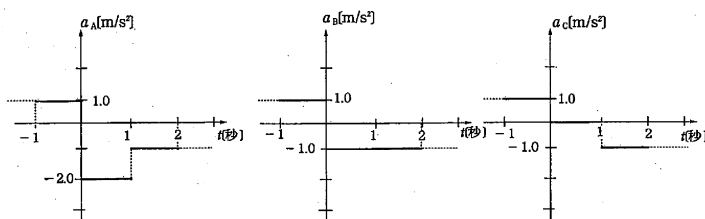


図 1

- (7) 単振り子の振動中心は重力，糸の張力，遠心力の3力がつり合う位置である。時刻とともに向心加速度が変化すれば振動中心が変化し，また振幅も変化する。しかし周期は題意より 2.0 秒で，一定としてよい。進行方向右向きの変位を正とし， $t = -1.0$ [秒] 以前の変位の大きさを x_0 ($\equiv l\theta$) とする。

★ -1.0 [秒] $\leq t < 0$ [秒]: 点 A, 点 B, 点 C いずれの振り子も $x = x_0$ の位置に静止している。

★ 0 [秒] $\leq t < 1.0$ [秒]:

◎ 点 A: 加速度 a_A が a から $-2a$ に変化するので， $x = -2x_0$ を中心として，振幅 $A = 3x_0$ の単振動を半周期分行う。

◎ 点 B: 加速度 a_B が a から $-a$ に変化するので， $x = -x_0$ を中心として，振幅 $A = 2x_0$ の単振動を半周期分行う。

◎ 点 C: 加速度 a_C が a から 0 に変化するので， $x = 0$ を中心として，振幅 $A = x_0$ の単振動を半周期分行う。

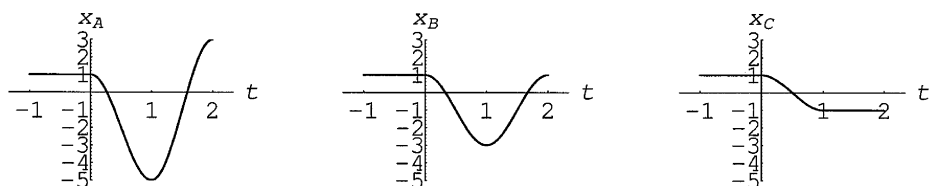
★ 1.0 [秒] $\leq t < 2.0$ [秒]:

◎ 点 A: 加速度 a_A が $-2a$ から $-a$ に変化するので， $x = -x_0$ を中心として，振幅 $A = 4x_0$ の単振動を行う。以後この運動を続ける。

◎ 点 B: 加速度 a_B が $-a$ のまま変化しないので， $x = -x_0$ を中心とした振幅 $A = 2x_0$ の単振動をその後も続ける。

◎ 点 C: 加速度 a_C が a から $-a$ に変化するので， $x = -x_0$ を中心とした単振動となるべきところだが， $t = 1.0$ [秒] のとき振り子はちょうど $x = -x_0$ の位置に達しているため，その後振り子はこの位置で静止してしまう。

以上より，グラフは次図。



物理的意味: <ポイント> 電車は自転している!?