

II 弦の振動を次のようにモデル化して考える。質量  $M$  の  $N$  個の粒子を糸でつなぎ、張力  $S$  で水平に張って両端を固定する。図1のように、静止状態で粒子は等間隔  $h$  で並んでいるとし、左から  $1, 2, \dots, N$  と番号付けしておく。弦の長さを  $l$  とし、静止状態の弦に沿って  $x$  軸をとる。ここで、各粒子は上下方向にのみ運動するものとし、鉛直方向上向きに  $y$  軸をとる。各粒子の静止状態からの変位を  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 、加速度をそれぞれ  $a_1, a_2, \dots, a_N$  とする。このモデルが弦の振動をよく近似するためには、弦の長さ  $l$  に比べて粒子間隔  $h$  は十分小さく、かつ隣合う粒子の変位の差は  $h$  より十分小さいことが必要である。さらに変位の差が十分小さいので、糸の張力  $S$  は振動中変化しないものと仮定する。すなわち、 $l \gg h \gg |y_n - y_{n-1}|$  ( $n = 2, 3, \dots, N$ )、 $S = \text{一定}$  である。次の文章に沿って空欄(a)~(i)を埋めよ。空欄(i)は単位を付けて有効数字2桁で答えよ。なお、重力の影響は無視せよ。

- (1) 図2に示すように、 $n$  番目の粒子は左右の糸から張力  $S$  の鉛直成分の力を受けて運動する。まず左側の糸について、図2で糸が  $x$  軸となす角を  $\theta$  とすると、 $|y_n - y_{n-1}| \ll h$  であるから、 $\sin \theta$  は、

$$\sin \theta = \frac{y_n - y_{n-1}}{\sqrt{h^2 + (y_n - y_{n-1})^2}} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

と近似できる。したがって、 $n$  番目の粒子が左側の糸から受ける鉛直方向上向きの力は  となる。同様にして右側の糸から受ける鉛直方向上向きの力は  となる。これより、 $n$  番目の粒子の運動方程式

$$Ma_n = \frac{S}{h} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})$$

が得られる。

- (2) 正弦波が弦を  $x$  の正の方向に伝わる時、各粒子は同じ周期  $T$  と同じ振幅  $A$  の単振動をしている。正弦波の波長を  $\lambda$  とし  $\omega = 2\pi/T$  とおくと、 $n$  番目の粒子の変位は、

$$y_n(t) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} nh\right) \quad (\text{ただし, } n = 1, 2, \dots, N),$$

と表される。 $y_{n-1}$ ,  $y_{n+1}$  に三角関数の加法定理を用いると,

$$y_{n-1} + y_{n+1} = \boxed{\text{(c)}} y_n$$

となる。また, 加速度  $a_n$  と変位  $y_n$  は単振動の関係式  $a_n = \boxed{\text{(d)}} y_n$  を満たす。これらを問(1)の運動方程式に代入し整理すると,

$$\omega = \boxed{\text{(e)}} \sin\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)$$

となる。

(3) このモデルにおいて弦の線密度  $\rho$  は  $\boxed{\text{(f)}}$  と表される。さらに, 波長  $\lambda$  が  $h$  に比べ十分に大きいとき,  $\sin(x) \approx x$  ( $|x| \ll 1$ ) の近似を使えば, 弦を伝わる横波の速さ  $v$  は,  $\rho$  を用いて  $\boxed{\text{(g)}}$  と表される。

(4) 問(2)の正弦波と固定端での反射波の重ね合わせによって定常波が形成される。腹の数が  $m$  個の定常波が生じているとき, その振動数  $f_m$  は  $\boxed{\text{(h)}}$  となる。今, 長さ  $1.0$  [m], 質量  $1.0$  [g] の鉄線的一端を  $0.50$  [kgw] の力で水平に張ったとき, この弦の基本振動の振動数は  $\boxed{\text{(i)}}$  となる。(単位の換算には重力加速度の値に  $9.8$  [m/s<sup>2</sup>] を使うこと。)

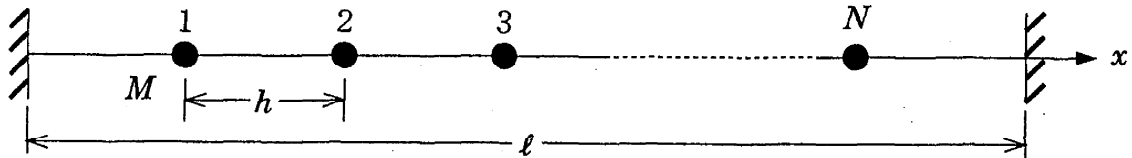


図 1

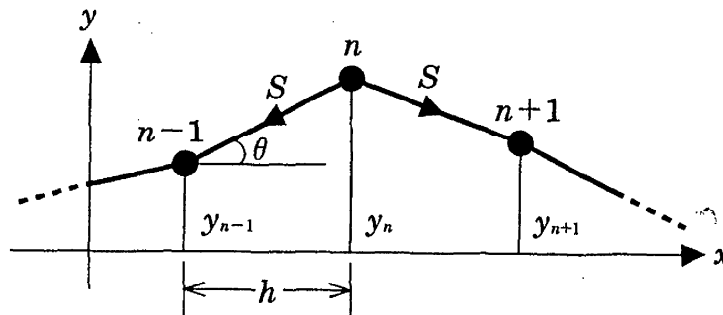


図 2