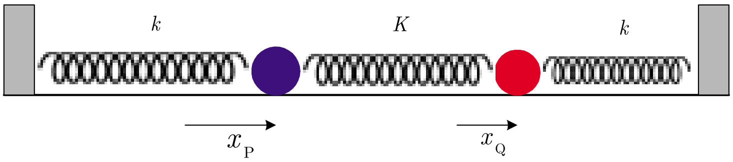
連成振動詳解



２つ以上の振動子が相互に作用を及ぼしながら振動するとき，連成振動という。この場合，１つの振動子の運動は他の振動子の運動に影響を与え，逆にその振動子自身も他の振動子の影響を受ける。機械の振動，２つの音叉の共鳴など卑近な例をはじめとして，原子や分子といったミクロの世界にもこうした例はきわめて多い。

もっとも単純なモデルとして，２振子がばねに結ばれている例を考えよう。２つの振子P，Qはばね定数 k の２本のばねと，ばね定数の K の１本のばねに結ばれ，k のばねは他端が固定され，K のばねはP，Q間に結ばれているとする。P，Qの質量はともに m とする。

いまP，Qの平衡点からの変位が x_{P}，x_{Q} であるとき，それぞれの運動方程式は，

$$m\frac{d^2x_{\mathrm{P}}}{dt^2} = -kx_{\mathrm{P}} + K(x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}}) = -(k+K)x_{\mathrm{P}} + Kx_{\mathrm{Q}} \tag{1}$$

$$m\frac{d^2x_{\mathrm{Q}}}{dt^2} = -kx_{\mathrm{Q}} - K(x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}}) = Kx_{\mathrm{P}} - (k+K)x_{\mathrm{Q}} \tag{2}$$

n 個の振動子からなる連成振動ではその運動方程式は n 個の連立線型常微分方程式となり，その解は一般に n 個の単振動の合成として表される。その単振動を基準振動，またその振動数を基準振動数という。この場合は振動子２個ゆえ，２個の基準振動の合成となる。その基準振動数を求めるために，上記の運動方程式を以下のように書き直してみる。

(1) + (2)，および (1) − (2) より，

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{Q}}) = -k(x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{Q}}) \tag{3}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{Q}}) = -(k+2K)(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{Q}}) \tag{4}$$

ここで，$(x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{Q}}) = 2q_1$，$(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{Q}}) = 2q_2$ とおくと，(3)，(4) 式は以下のようになり，

これより 2 つの基準角振動数 ω_1，ω_2 が求められる。

$$(3)\text{ より}，\quad m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -kq_1 \qquad \therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

$$(4)\text{ より}，\quad m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -(k+2K)q_2 \qquad \therefore \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}} \tag{6}$$

したがって，A_1，A_2，θ_1，θ_2 を初期条件より定まる定数として，

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ q_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \end{cases}$$

とおくと，

$$\therefore x_{\mathrm{P}} = q_1 + q_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \tag{7}$$

$$x_{\mathrm{Q}} = q_1 - q_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \tag{8}$$

たとえば一例として，$t = 0$ において $x_{\mathrm{P}} = a$，$x_{\mathrm{Q}} = v_{\mathrm{P}} = v_{\mathrm{Q}} = 0$ とすると，

$$\begin{cases} a = A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2 \\ 0 = A_1 \sin\theta_1 - A_2 \sin\theta_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\theta_1 + \omega_2 A_2 \cos\theta_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\theta_1 - \omega_2 A_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\therefore A_1 = \frac{a}{2}, \qquad A_2 = -\frac{a}{2}, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$\therefore x_{\mathrm{P}} = \frac{a}{2}\cos\omega_1 t + \frac{a}{2}\cos\omega_2 t = a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{10}$$

$$x_{\mathrm{Q}} = \frac{a}{2}\cos\omega_1 t - \frac{a}{2}\cos\omega_2 t = a\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{11}$$

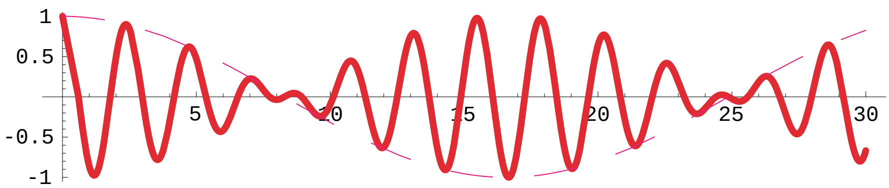


図 1

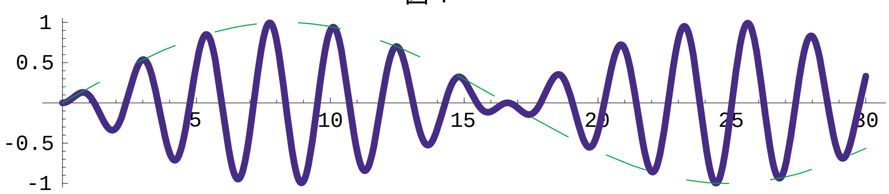


図 2

上の図 1，図 2 は $k = 6K$ である場合の x_{P} と x_{Q} の時間変化を表している。これより分かるように，x_{P} の振幅が最大の時刻と x_{Q} の振幅が最大となる時刻がちょうど逆になっ

ている。すなわち，Ｐの振動がＱに伝播してＱの振動エネルギーが増大するにつれてＰの振動エネルギーが減少し，またしばらくの後には今度はＱの振動エネルギーが減少しＰの振動エネルギーが増大している。つまりＰとＱの間でエネルギーのやり取りが行われているわけで，これはまさに「共振現象」である。

なお，もし ω_1 の振動しか起きていないとすれば，(9)，(10) で $A_2 = 0$ とおくと $x_\mathrm{P} = x_\mathrm{Q}$ となり，ＰとＱは常に同じ向きに同じ運動をすることになる。つまり，ω_1 の振動 q_1 は下図３のような振動を表すことを意味する。また同様に，ω_2 の振動しか起きていないとすれば，(9)，(10) で $A_1 = 0$ とおくと $x_\mathrm{P} = -x_\mathrm{Q}$ となり，ＰとＱは常に逆向きの運動をすることになる。つまり，ω_2 の振動 q_2 は下図４のような振動を表すことを意味する。

この場合のＰ，Ｑのような２振子の運動は，一般に下図３，４のような２つの特別な単振動の組み
として表されることが知られている。

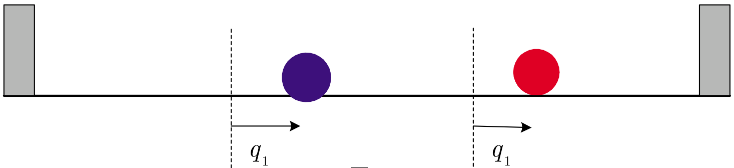


図３

図４