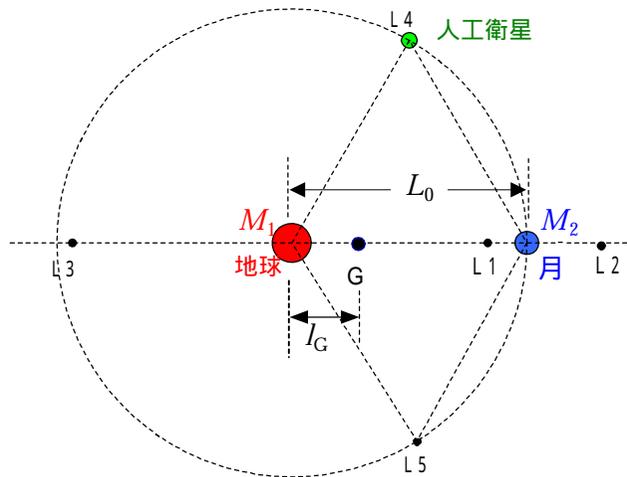


ラグランジュ点とは？

[シミュレーションへ](#)

ラグランジュ点とはどのような点なのか。

以下、人工衛星が地球と月の引力を受けながらその共通重心のまわりを周回するという設定で考察する。



人工衛星の質量は地球や月に対して無視できるので、全体の共通重心Gは地球と月だけで決まる。人工衛星がこの共通重心の周りを地球・月と同じ角速度 ω_0 で周回できる条件について考える。

まず、地球・月間の距離を L_0 、それぞれの質量を M_1 、 M_2 とすると、2質点と重心との距離は質量に反比例するので、地球から重心Gまでの距離 I_G は、

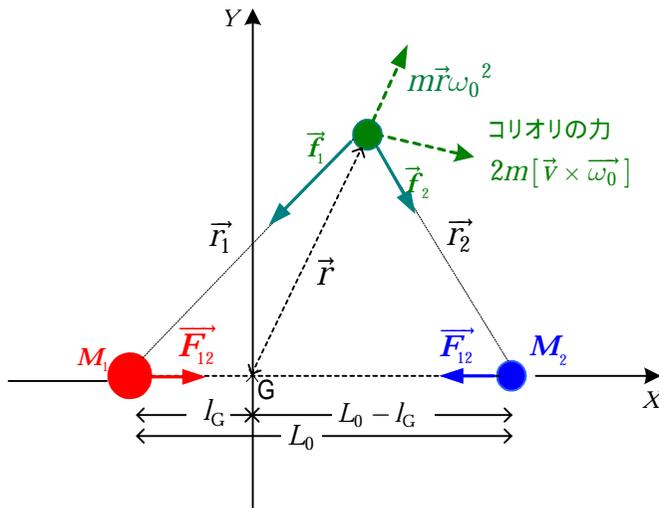
$$I_G = \frac{M_2}{M_1 + M_2} L_0$$

よって地球（または月）について円運動の式を立てることによって、地球・月の公転角速度 ω_0 を求めることができる。地球について式を立てれば、

$$M_1 \times \text{向心加速度} = \text{地球に働く万有引力}$$

$$\therefore M_1 l_G \omega_0^2 = M_1 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} L_0 \cdot \omega_0^2 = \frac{GM_1 M_2}{L_0^2}$$

$$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{L_0^3}}$$



地球と月は重心Gの周りに角速度 ω_0 で等速円運動をしているのであるから、人工衛星については地球・月に対する相対運動について考えれば十分である。

以下、地球・月に固定した座標系（以後、XY座標系と呼ぶ）を考えると、人工衛星の相対運動はこのXY座標系内での運動ということになる。このXY座標系は一定角速度 ω_0 で回転する回転座標系であるから、人工衛星に働く力として万有引力のほかに、**遠心力**と**コリオリの力**を考える必要がある。ここで遠心力もコリオリの力も、回転座標系で観測した場合に現れる慣性力である。したがって人工衛星のXY座標系内での加速度 \vec{a} は、上図の文字を使って、

$$m\vec{a} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + m\omega_0^2 \vec{r} + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}_0]$$

$$= \vec{F} + m\omega_0^2 \vec{r} + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}_0] \quad (1.1)$$

上式の右辺第1項は地球・月からの万有引力の合力、第2項は遠心力、第3項はコリ

球からの引力 f_1 は左向き，月からの引力 f_2 は右向き，遠心力は右向きに働く。
 $\vec{v} = 0$ であるから，コリオリの力は働かない。よって， L_1 点の地球からの距離 l_1 は，次式を満たす。

$$\begin{aligned} 0 &= -f_1 + f_2 + \text{遠心力} \\ &= -\frac{GmM_1}{l_1^2} + \frac{GmM_2}{(L_0 - l_1)^2} + m\omega_0^2(l_1 - l_G) \\ &= -\frac{GmM_1}{l_1^2} + \frac{GmM_2}{(L_0 - l_1)^2} + m\left(\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{L_0^3}}\right)^2\left(l_1 - \frac{M_2}{M_1 + M_2}L_0\right) \end{aligned}$$

以下同様にして，

2 . ラグランジュ点 L_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{GmM_1}{l_2^2} - \frac{GmM_2}{(L_0 - l_2)^2} + m\omega_0^2(l_2 - l_G) \\ &= -\frac{GmM_1}{l_2^2} - \frac{GmM_2}{(L_0 - l_2)^2} + m\left(\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{L_0^3}}\right)^2\left(l_2 - \frac{M_2}{M_1 + M_2}L_0\right) \end{aligned}$$

3 . ラグランジュ点 L_3 :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{GmM_1}{l_3^2} + \frac{GmM_2}{(L_0 + l_3)^2} - m\omega_0^2(l_3 + l_G) \\ &= \frac{GmM_1}{l_3^2} + \frac{GmM_2}{(L_0 + l_3)^2} - m\left(\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{L_0^3}}\right)^2\left(l_3 + \frac{M_2}{M_1 + M_2}L_0\right) \end{aligned}$$

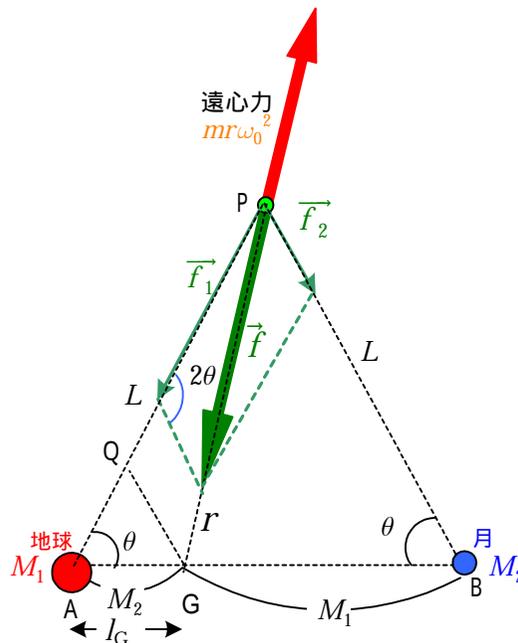
以上3式はそれぞれ l_1 , l_2 , l_3 に関して5次方程式になるので，一般的な形では解は求まらない。しかし，近似的な数値解なら計算することができる。

以下にいくつかの例についてラグランジュ点 L_1 , L_2 , L_3 の値を示す。

天体	質量比 M_2 / M_1	距離 L_0	l_1	l_2	l_3
月 / 地球	0.0123	$3.84 \times 10^5 \text{ km}$	$0.849L_0$	$1.168L_0$	$0.993L_0$
地球 / 太陽	3.04×10^{-6}	$1.5 \times 10^8 \text{ km}$	$0.990L_0$	$1.010L_0$	$1.000L_0$
木星 / 太陽	9.55×10^{-4}	$7.8 \times 10^8 \text{ km}$	$0.933L_0$	$1.070L_0$	$0.999L_0$

B) 正三角形位置のラグランジュ点 (L_4, L_5)

地球・月のライン上にないラグランジュ点としては、地球・月・人工衛星の3者が正三角形をなさず位置しかない。以下にこれを示す。



万有引力の合力 \vec{f} が共通重心 G に向くためには、まず PAB は 2 等辺三角形であればよい。このことは以下のようにして簡単に確かめられる。

もし PAB が 2 等辺三角形であるとすれば、このとき $QG \parallel PB$, $\overline{AP} = \overline{BP} = L$ とすると、2 等辺三角形の相似の関係を使って、

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QG}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{GmM_1}{L^2}}{\frac{GmM_2}{L^2}} = \frac{M_1}{M_2}$$

A B間を $M_2 : M_1$ の比に内分する点は、まさに共通重心に他ならない。

つぎに、さらに P A B が正三角形であるとき、 $L = L_0$ 、 $\theta = 60^\circ$ として、

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2 \cos 2\theta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{GmM_1}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{GmM_2}{L^2}\right)^2 + \frac{GmM_1}{L^2} \cdot \frac{GmM_2}{L^2}} \\ &= \frac{Gm}{L_0^2} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_1M_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{遠心力 } m\omega_0^2 r &= m \left(\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{L_0^3}} \right)^2 \sqrt{L^2 + I_G^2 - 2L \cdot I_G \cos \theta} \\ &= \frac{Gm(M_1 + M_2)}{L_0^3} \sqrt{L_0^2 + \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} L_0 \right)^2 - L_0 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} L_0} \\ &= \frac{Gm}{L_0^2} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_1M_2} \\ \therefore m\omega_0^2 r - f &= 0 \end{aligned}$$

すなわち P A B が正三角形であるとき、この点 P で万有引力の合力と遠心力とが釣りあうことが示された。もっと詳しい計算によって、これらの点以外にこのような点がないことも示される。

ラグランジュ点の安定性について

次にラグランジュ点の安定性について考える。

先のアニメで見たように、点 $L_1 \sim L_3$ は不安定であり、これらの点から少しでもずれると、そのずれはますます増大していく。これに対してラグランジュ点 L_4 と L_5 は非常に安定しており、人工衛星はこれらの点から大きくずれていくことはない。

このことは(1.1)式を使って導かれるのであるが、かなり大変な計算になる。そこでおよその理由として、多少強引かつ乱暴ではあるが、つぎのような定性的説明にとどめる。

前述の(1.1)式より、

$$m\vec{a} - \vec{f} - m\omega_0^2\vec{r} - 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}_0] = 0$$

上式に \vec{v} を内積として乗じ、その上で時間積分することによって次式を得る（上式左辺第4項に \vec{v} を内積すると、 $\vec{v} \cdot [\vec{v} \times \vec{\omega}_0] = \vec{\omega}_0 \cdot [\vec{v} \times \vec{v}] = 0$ となることに注意）

$$\frac{1}{2}mv^2 - \int \vec{f} \cdot d\vec{r} - \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 = const.$$

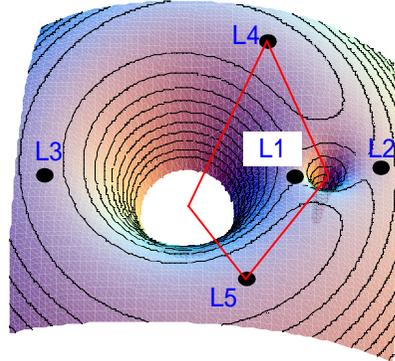
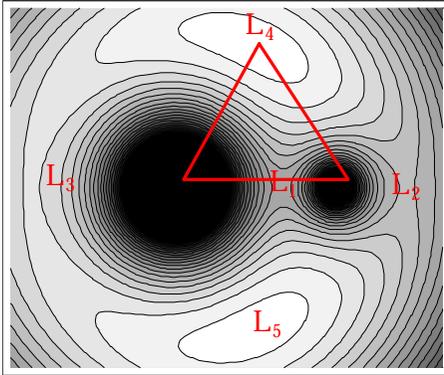
よって

$$\begin{aligned} \phi &= -\int \vec{f} \cdot d\vec{r} - \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 \\ &= -\frac{GmM_1}{r_1} - \frac{GmM_2}{r_2} - \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 \end{aligned}$$

とおくと、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \phi = const.$$

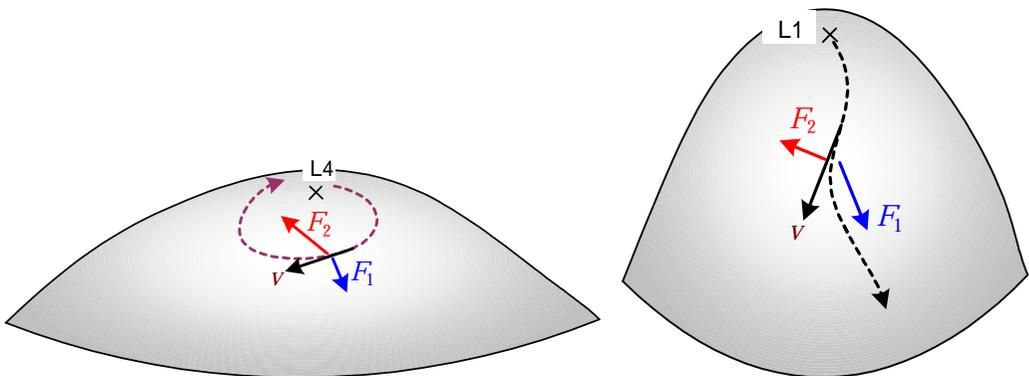
となり、運動エネルギーと ϕ との和は一定に保たれる。これは人工衛星の XY 座標系における力学的エネルギー保存則に相当するもので、本問のような3対問題を考えるときにきわめて重要な保存量である（ヤコビ積分と呼ばれる）。 ϕ は万有引力と遠心力との合力による一種のポテンシャルのような意味合いを持つ量である。下図は、 ϕ についての等高線を表す（このグラフをゼロ速度曲線という。下右図は、これに高低を模式的に付加したもの）。ラグランジュ点は、 ϕ が極大値をとる位置である。



ポテンシャル面の傾きは力を表すので、 XY 座標系において人工衛星はこのポテンシャル面が傾いている方向・向きに力を受ける。

ここで人工衛星がある点から動き出したとすると、 XY 座標系において力学的エネルギーが保存されることから、 ϕ の小さいところ（上図の色の濃い部分）に行くほど、人工衛星の運動エネルギーが増大し、速度が増大していく。ところが XY 座標系内で運動する物体には **コリオリの力が働く**。この点が重要なポイントになる。

コリオリの力は、回転座標系に対して物体が速度を持つときに現れる慣性力の一種で、北半球では低気圧が反時計回りに渦を巻くのはコリオリの力が働くためである。 XY 座標系が反時計回りに回転している場合、コリオリの力は速度 \vec{v} に直角で進行方向に対して右向きに働く。



まず ラグランジュ点 L_4 付近の運動について考えよう。 L_4 点からほんの少しずれた

位置に人工衛星があると、人工衛星は ϕ 面の勾配の向きに力を受けて動き始める。ここでラグランジュ点L4付近の ϕ 面は極めて緩やかになっているため、人工衛星に働く ϕ 面の勾配による力(万有引力と遠心力との合力) F_1 はかなり小さい。一方L4点から離れるにつれて人工衛星の速度は徐々に増していくが、このとき働くコリオリの力 F_2 の方が F_1 に勝れば、人工衛星は向きを変えて再びL4点の方に引き返していくことになる。以後この繰り返しによって、人工衛星はL4点付近でウロウロすることになる。

これに対してL1, L2, L3点付近の ϕ 面は極めて急勾配になっている。したがって ϕ 面の勾配による力 F_1 はきわめて大きく、コリオリの力 F_2 が働いているにもかかわらず軌道は曲がりきれず、どんどんL1, L2, L3点から離れていってしまうわけである。この辺の事情は、スキーでカーブをしようとエッジを立てているとき、緩斜面なら曲がりきれて元の位置に戻ってこられるが、急斜面ではエッジを立てているにもかかわらずどんどん下方に滑り落ちていくのと似ている。

以上より分かるように、ラグランジュ点の安定性については ϕ 面の勾配が重要な鍵を握っており、これは「地球と月」といった元になる2天体の質量比で決まってくる。詳

しい計算によれば、2天体のうち質量の小さい方が大きい方の $\frac{9 - \sqrt{69}}{9 + \sqrt{69}} \approx 0.040$ 倍以下

のときに限ってL4, L5点が安定になることが分かっている。先に掲げた表より、地球と月の場合も、太陽と地球の場合もL4, L5点は安定であることが分かる。

[シミュレーションへ](#)