コリオリ力（りょく）の導出

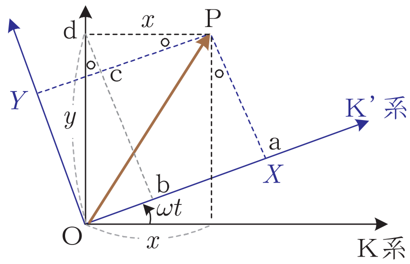

図 1　（∘ : ωt ）

図１において，固定された座標系（慣性座標系）K の z 軸（紙面に垂直で紙面の裏から表の向き）のまわりに角速度 ω で回転する座標系（回転座標系）K$'$ があるとする。

点Pの時刻 t における K 系，および K$'$ 系での座標をそれぞれ (x,y), (X,Y) とする。z 座標はともに 0 とする。このとき，

$$\begin{cases} X = \overline{\mathrm{Pc}} + \overline{\mathrm{bO}} = x\cos\omega t + y\sin\omega t & \cdots ① \\ Y = -\overline{\mathrm{dc}} + \overline{\mathrm{db}} = -x\sin\omega t + y\cos\omega t & \cdots ② \end{cases}$$

一方図より (または　① × $\cos\omega t$ − ② × $\sin\omega t$，および ① × $\sin\omega t$ + ② × $\cos\omega t$ としてもよい) ,

$$\begin{cases} x = X\cos\omega t - Y\sin\omega t & \cdots ③ \\ y = X\sin\omega t + Y\cos\omega t & \cdots ④ \end{cases}$$

また，質量 m の物体Qにはたらく力 $\overrightarrow{F}$ の慣性系 K，および回転系 K$'$ での成分をそれぞれ $(F_x,\,F_y)$，$(F_X,\,F_Y)$ とする（z 成分はともに 0 とする）と，上記と同様に次の変換式が成り立つ（図２参照)。

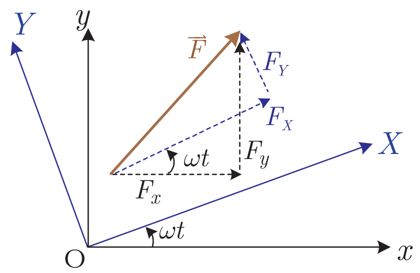

図２

$$\begin{cases} F_X = F_x\cos\omega t + F_y\sin\omega t & \cdots ⑤ \\ F_Y = -F_x\sin\omega t + F_y\cos\omega t & \cdots ⑥ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_X\cos\omega t - F_Y\sin\omega t & \cdots ⑦ \\ F_y = F_X\sin\omega t + F_Y\cos\omega t & \cdots ⑧ \end{cases}$$

ここで慣性系 K において物体Qに対して成り立つ運動方程式は（以下，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を $\ddot{x}$ のように表記する）,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x & \cdots ⑨ \\ m\ddot{y} = F_y & \cdots ⑩ \end{cases}$$

であるが，上の慣性系 K における運動方程式⑨，⑩式を回転系 K$'$ での座標 (X,Y) と力の成分 $(F_X,\,F_Y)$ を使って書き表すことを考える。

まず上式の右辺を書き直す。⑦，⑧を⑨，⑩に代入して，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_X\cos\omega t - F_Y\sin\omega t & \cdots ⑪ \\ m\ddot{y} = F_X\sin\omega t + F_Y\cos\omega t & \cdots ⑫ \end{cases}$$

であるから，　⑪ × $\cos\omega t$ + ⑫ × $\sin\omega t$，および −⑪ × $\sin\omega t$ + ⑫ × $\cos\omega t$ より，

$$\begin{cases} m(\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t) = F_X & \cdots ⑬ \\ m(-\ddot{x}\sin\omega t + \ddot{y}\cos\omega t) = F_Y & \cdots ⑭ \end{cases}$$

次に左辺を書き直す。③，④式を時間で微分すると（以下，$\dfrac{dx}{dt}$ を $\dot{x}$ のように表記する），

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{X}\cos\omega t - \omega X\sin\omega t - \dot{Y}\sin\omega t - \omega Y\cos\omega t & \cdots ⑮ \\ \dot{y} = \dot{X}\sin\omega t + \omega X\cos\omega t + \dot{Y}\cos\omega t - \omega Y\sin\omega t & \cdots ⑯ \end{cases}$$

⑮，⑯式をもう一度時間微分すると，

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{X}\cos\omega t - 2\omega\dot{X}\sin\omega t - \omega^2 X\cos\omega t - \ddot{Y}\sin\omega t - 2\omega\dot{Y}\cos\omega t + \omega^2 Y\sin\omega t & \cdots ⑰ \\ \ddot{y} = \ddot{X}\sin\omega t + 2\omega\dot{X}\cos\omega t - \omega^2 X\sin\omega t + \ddot{Y}\cos\omega t - 2\omega\dot{Y}\sin\omega t - \omega^2 Y\cos\omega t & \cdots ⑱ \end{cases}$$

⑬，⑭に⑰，⑱の $\ddot{x}$，$\ddot{y}$ を代入して整理すると，

$$\begin{cases} m(\ddot{X} - \omega^2 X - 2\omega\dot{Y}) = F_X & \cdots ⑲ \\ m(\ddot{Y} - \omega^2 Y + 2\omega\dot{X}) = F_Y & \cdots ⑳ \end{cases}$$

以上が，慣性系に対して成り立つ運動方程式を回転系で観測される量 (X, Y)，(F_X, F_Y) を使って書き表したものである。

ここで，$\ddot{X}$，$\ddot{Y}$ は回転系で観測される物体Ｑの加速度であるから，上の式を次のように変形することによって，物体Ｑの回転系 K′ における運動方程式を得る。

$$\begin{cases} m\ddot{X} = F_X + m\omega^2 X + 2m\omega\dot{Y} = F_X + m\omega^2 X + 2m\omega V_Y & \cdots ㉑ \\ m\ddot{Y} = F_Y + m\omega^2 Y - 2m\omega\dot{X} = F_Y + m\omega^2 Y - 2m\omega V_X & \cdots ㉒ \end{cases}$$

ただし V_X，V_Y は物体Ｑの速度 $\vec{V}$ の回転系 K′ での X 成分，Y 成分である。

以上より，回転系で観測した場合，実際にはたらいている力 (F_X, F_Y) のほかに，㉑式，㉒式の右辺第２項および第３項のような力が作用しているように観測されることが分かる。これらはいずれも慣性力であり，第２項が**遠心力**，第３項が**コリオリの力**（あるいは　**転向力**）と呼ばれる。

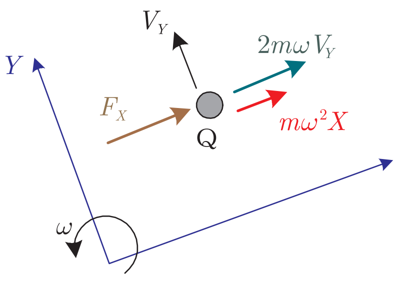

図３（Ｘ方向の力）

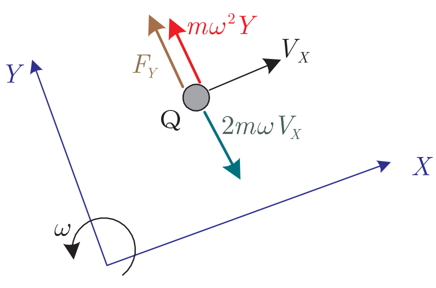

図４（Ｙ方向の力）

遠心力は物体の速度を含んでいないので，回転系 K′ に対して物体が運動していようが静止していようが関係なく，常に観測される慣性力である。また遠心力は ω の２乗に比例するので，ω の正負，つまり回転系 K′ の回転する向きに関係なく X あるいは Y と同じ向きにはたらく，つまり遠心方向（回転中心から遠ざかる方向）にはたらくことが分かる。

これに対して，**コリオリの力**は物体の速度に関わる慣性力であり，回転系 K′ に対して静止している物体には現

れない。また㉑式，㉒式より，物体にはたらくコリオリ力の X 方向成分，Y 方向成分を図示すると図３，図４の緑色の矢線のようになり，コリオリの力の X 成分は物体の速度の Y 成分 V_Y に比例しその向きは V_Y に対して垂直で右向き，Y 成分は V_X に比例しその向きは V_X に対して垂直で右向きである。しかしコリオリ力は角速度 ω の１乗に比例するので，ω の正負，つまり回転系 K' の回転の向きが逆になればコリオリ力の向きも逆向きとなる。

一般に，角速度 $\vec{\omega}$ で回転する座標系に対し速度 $\vec{V}$ で運動する質量 m の物体にはたらくコリオリの力は，$\vec{\omega}$ と $\vec{V}$ のベクトル積（外積）として与えられ，

$$2m[\vec{V} \times \vec{\omega}]$$

と表される。その向きは，$\vec{V}$ ベクトルから $\vec{\omega}$ の向きに右ねじを回したときのねじの進む向きに一致する。

======================

本シミュレーションの場合

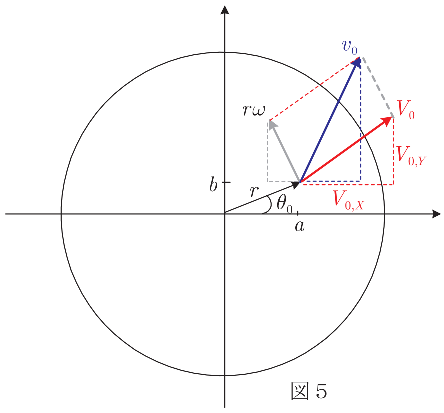

図５

本シミュレーションの場合，慣性系に対して等速度運動をするケースであるから，$F_x = 0$，$F_y = 0$，したがって⑤，⑥より $F_X = 0$，$F_Y = 0$ である。これらを㉑式，㉒式に適用すると，

$$\begin{cases} m\ddot{X} = m\omega^2 X + 2m\omega\dot{Y} & \cdots ㉓ \\ m\ddot{Y} = m\omega^2 Y - 2m\omega\dot{X} & \cdots ㉔ \end{cases}$$

物体の初期位置を，慣性系，回転系に対してともに　$x_0 = X_0 = a$，$y_0 = Y_0 = b$ とする。また初速度を慣性系に対して $(v_{0,x},\, v_{0,y})$ とすると，回転系に対する初速度 $(V_{0,X},\, V_{0,Y})$ は回転に伴う速度 $r\omega$ を考慮して，

$$\begin{cases} v_{0,x} = V_{0,X} - r\omega\sin\theta_0 = V_{0,X} - r\omega \times \dfrac{b}{r} = V_{0,X} - b\omega & \therefore V_{0,X} = v_{0,x} + b\omega \\ v_{0,y} = V_{0,Y} + r\omega\cos\theta_0 = V_{0,Y} + r\omega \times \dfrac{a}{r} = V_{0,Y} + a\omega & \therefore V_{0,Y} = v_{0,Y} - a\omega \end{cases}$$

となるので，この初期条件のもとで上の㉓式，㉔式の２元２階微分方程式を解くと，

$$\begin{cases} X = (a + v_{0,x}t)\cos\omega t + (b + v_{0,y}t)\sin\omega t \\ Y = -(a + v_{0,x}t)\sin\omega t + (b + v_{0,y}t)\cos\omega t \end{cases}$$

となる。ここで，$a + v_{0,x}t$ および $b + v_{0,y}t$ は慣性系での時刻 t における x 座標，y 座標にほかならないので，上式は結局，

$$\begin{cases} X = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ Y = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{cases}$$

となり，先の①式，②式と同じであり，単に等速度運動している物体を回転系に座標変換しているのと同じ結果になる。