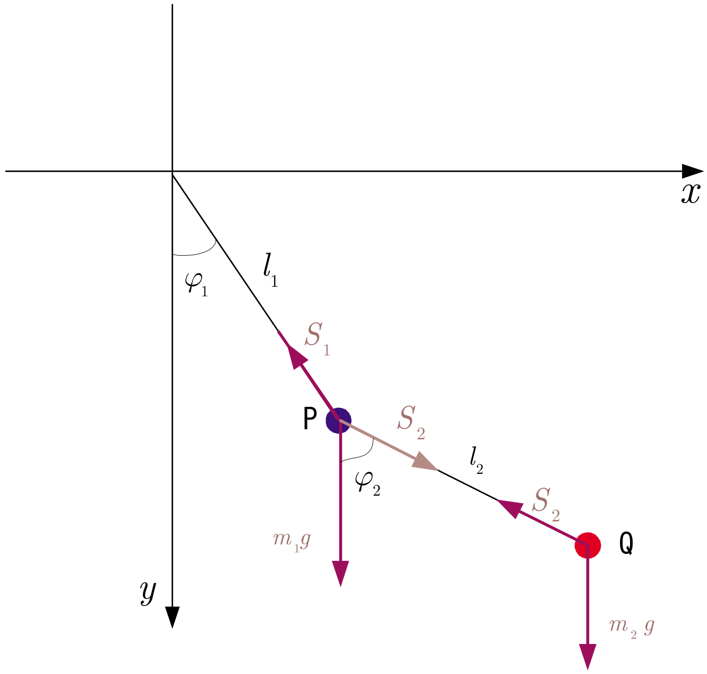
第１小球P（質量 m_1）が長さ l_1 の針金 a の下端につるされ，その下に第２小球Q（質量 m_2）が長さ l_2 の針金 b の下端に図のようにつるされているとする。針金 a の上端は固定されており，ここを原点として，図のように座標軸を定める。２本の針金とも質量が無視できるが，曲がることはないとする。



２本の針金が鉛直方向に対してなす角をそれぞれ φ_1，φ_2 とし，針金の張力を S_1，S_2 とすると，P，Qの水平方向，鉛直方向の運動方程式は,（$\ddot{x_1}$ などの記号は x_1 の時間の２階微分 $\ddot{x_1} = \dfrac{d^2x_1}{dt^2}$ を意味する）

$$\mathrm{P}:\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x_1} = -S_1\sin\varphi_1 + S_2\sin\varphi_2 \cdots\cdots ① \\ m_1\ddot{y_1} = -S_1\cos\varphi_1 + m_1 g + S_2\cos\varphi_2 \cdots\cdots ② \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Q}:\left\{\begin{array}{l} m_2\ddot{x_2} = -S_2\sin\varphi_2 \cdots\cdots\cdots ③ \\ m_2\ddot{y_2} = m_2 g - S_2\cos\varphi_2 \cdots\cdots ④ \end{array}\right.$$

さらにP，Qが長さの決まっている針金に結ばれているとことを表す以下の式を加えて，P，Qの運動を知るための方程式がそろった。

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = l_1\sin\varphi_1 \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ y_1 = l_1\cos\varphi_1 \cdots\cdots\cdots ⑥ \\ x_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \cdots\cdots\cdots ⑦ \\ y_2 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 \cdots\cdots\cdots ⑧ \end{array}\right.$$

ここでP，Qは十分に小さな振幅で運動しているとすると，φ_1，φ_2 は十分に小さな量として近似をすると，⑤ ～ ⑧ より，

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \fallingdotseq l_1\varphi_1 \cdots\cdots\cdots ⑤' \\ y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \fallingdotseq l_1 \cdots\cdots\cdots ⑥' \\ x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \fallingdotseq l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 \cdots\cdots\cdots ⑦' \\ y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \fallingdotseq l_1 + l_2 \cdots\cdots\cdots ⑧' \end{cases}$$

上式を時間で２階微分して，

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = l_1\ddot{\varphi}_1 \cdots\cdots\cdots ⑤'' \\ \ddot{y}_1 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑥'' \\ \ddot{x}_2 = l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 \cdots\cdots\cdots ⑦'' \\ \ddot{y}_2 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑧'' \end{cases}$$

これを ① ～ ④ に代入し，さらに $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ などの近似を適用すると，

$$\begin{cases} m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 = -S_1\varphi_1 + S_2\varphi_2 \cdots\cdots ①' \\ 0 = -S_1 + m_1 g + S_2 \cdots\cdots ②' \\ m_2(l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2) = -S_2\varphi_2 \cdots\cdots ③' \\ 0 = -S_2 + m_2 g \cdots\cdots ④' \end{cases}$$

以上より，

$$\begin{cases} S_2 = m_2 g \cdots\cdots ⑨ \\ S_1 = (m_1 + m_2) g \cdots\cdots ⑩ \\ \ddot{\varphi}_1 = -\dfrac{m_1 + m_2}{m_1 l_1} g\varphi_1 + \dfrac{m_2}{m_1 l_1} g\varphi_2 \cdots\cdots ⑪ \\ \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g\varphi_1 - \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g\varphi_2 \cdots\cdots ⑫ \end{cases}$$

⑪，⑫ 式は連立線型微分方程式で，この２式より φ_1，φ_2 は二つの基準振動の合成として表すことができることが分かる（詳しくはここをクリック）。その基準振動数 ω_1，ω_2 は，上記２式の連立より求められる。
とくに $m_1 = m_2 = m$，$l_1 = l_2 = l$ の場合は

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -2\dfrac{g}{l}\varphi_1 + \dfrac{g}{l}\varphi_2 \cdots\cdots ⑪' \\ \ddot{\varphi}_2 = 2\dfrac{g}{l}\varphi_1 - 2\dfrac{g}{l}\varphi_2 \cdots\cdots ⑫' \end{cases}$$

２つの基準振動数を求めるために，次の式変形をする（ただし，この方法は一般的なやり方ではない。一般的な方法は他を参照されたい。）。
⑪$' \times \sqrt{2}$ + ⑫$'$，および ⑪$' \times \sqrt{2}$ − ⑫$'$ より

$$\begin{cases} \sqrt{2}\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{d^2}{dt^2}(\sqrt{2}\varphi_1 + \varphi_2) = -\dfrac{g}{l}(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}\varphi_1 + \varphi_2) \cdots\cdots ⑪'' \\ \sqrt{2}\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{d^2}{dt^2}(\sqrt{2}\varphi_1 - \varphi_2) = -\dfrac{g}{l}(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}\varphi_1 - \varphi_2) \cdots\cdots ⑪'' \end{cases}$$

ここで $q_1=\sqrt{2}\varphi_1+\varphi_2$，$q_2=\sqrt{2}\varphi_1-\varphi_2$ とおくと，上式は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2q_1}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}(2-\sqrt{2})q_1 \\ \dfrac{d^2q_2}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}(2+\sqrt{2})q_2 \end{cases}$$

となり，これより基準振動数は，

$$\begin{cases} \omega_1=\sqrt{(2-\sqrt{2})\dfrac{g}{l}} \\ \omega_2=\sqrt{(2+\sqrt{2})\dfrac{g}{l}} \end{cases}$$

と求まる。ここで，

$$\begin{cases} q_1=\sqrt{2}\varphi_1+\varphi_2 \\ q_2=\sqrt{2}\varphi_1-\varphi_2 \end{cases} \text{ゆえ，} \quad \begin{cases} \varphi_1=\dfrac{q_1+q_2}{2\sqrt{2}} \\ \varphi_2=\dfrac{q_1-q_2}{2} \end{cases}$$

であるから，もし ω_2 の振動が起きていなかったとすると $q_2=0$ とおいて，

$$\begin{cases} \varphi_1=\dfrac{q_1}{2\sqrt{2}} \\ \varphi_2=\dfrac{q_1}{2} \end{cases} \qquad \therefore \varphi_2=\sqrt{2}\varphi_1$$

したがって，Pの変位が $x_1=a$ のとき, Qの変位は $x_2=a+\sqrt{2}a$ となる。つまり ω_1 の基準振動は，２球の変位が常に同じ向きで, 変位の大きさの比が $1:1+\sqrt{2}$ になった振動であることが分かる（図１）。

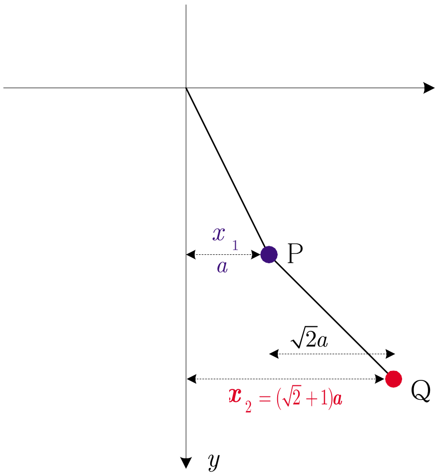


図1

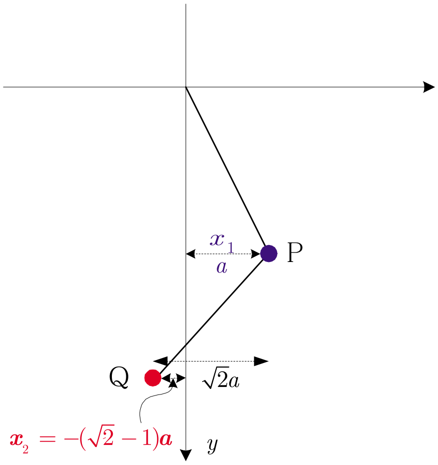


図2

逆にもし ω_1 の振動が起きていなかったとすると，$q_1 = 0$ とおいて，

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{q_2}{2\sqrt{2}} \\ \varphi_2 = -\dfrac{q_2}{2} \end{cases} \qquad \therefore \varphi_2 = -\sqrt{2}\,\varphi_1$$

したがって，Ｐの変位が $x_1 = a$ のとき，Ｑの変位は $x_2 = a - \sqrt{2}\,a = -(\sqrt{2}-1)a$ となる。つまり ω_2 の基準振動は，２球の変位が常に逆向きで，変位の大きさの比が $1 : \sqrt{2}-1$ になった振動であることが分かる（図２）。
そして，Ｐ，Ｑの振動は，これら２つの基準振動を初期条件で決まる振幅比で組み合わせた運動となる。

振れ幅が大きいと，振り子の運動はカオスになる …!?

以上は，微小振動という条件の下で近似式が適用できた場合であった。しかしＰ，Ｑが大きく振れる場合はもちろん近似は使えず，厳密な解を求めていく必要がある。
この厳密解を求めるのに，これまでのやり方では計算が複雑になりすぎる。このような場合一般には，解析力学の立場から，agrange の方程式を利用する。
これは，物体の運動エネルギー T と位置エネルギー V との差 $L = T - V$ なる量，（L:agrange 関数またはラグランジアンと呼ぶ）を位置座標成分と速度成分と表し，これをで微分していくというやり方である。たとえば L がある座標変数 q とおよびその時間微分量 $\dot{q}$ の関数であるとき，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

とおくことで q に関する運動方程式が得られるのである。
先の図のように，針金 a，b が鉛直となす角度を φ_1，φ_2 とすると，Ｐ，Ｑの座標は，

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \\ y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \dot{x_1} = l_1 \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi_1} \\ \dot{y_1} = -l_1 \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \dot{x_2} = l_1 \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi_1} + l_2 \cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi_2} \\ \dot{y_2} = -l_1 \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi_1} - l_2 \sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi_2} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m_1(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) - (-m_1 g y_1 - m_2 g y_2) \\
&= \frac{1}{2}m_1\{(l_1\cos\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1)^2 + (-l_1\sin\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1)^2\} \\
&+ \frac{1}{2}m_2\{(l_1\cos\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1 + l_2\cos\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2)^2 + (-l_1\sin\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1 - l_2\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2)^2\} \\
&+ m_1 g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2) \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2){l_1}^2{\dot{\varphi}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{l_2}^2{\dot{\varphi}_2}^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
&+ (m_1+m_2)g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2\cos\varphi_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} &= (m_1+m_2){l_1}^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 \\
&+ m_2 l_1 l_2{\dot{\varphi}_2}^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2)g l_1\sin\varphi_1 = 0\cdots\cdots⑬ \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_2} &= m_2 l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1 \\
&- m_2 l_1 l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2){\dot{\varphi}_1}^2 + m_2 g l_2\sin\varphi_2 = 0\cdots\cdots⑭
\end{aligned}
$$

①，② 式を連立させて $\ddot{\varphi}_1$，$\ddot{\varphi}_2$ について解くと，

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)}\Bigg\{-(m_1+m_2)g\sin\varphi_1\cdot\frac{1}{l_1} + m_2 g\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_2\cdot\frac{1}{l_1} \\
&\qquad - m_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2){\dot{\varphi}_1}^2 - m_2\sin(\varphi_1-\varphi_2){\dot{\varphi}_2}^2\cdot\frac{l_2}{l_1}\Bigg\} \\
\ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{m_1 + m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)}\Bigg\{(m_1+m_2)g\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)\frac{1}{l_2} \\
&\qquad + (m_1+m_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2){\dot{\varphi}_1}^2\cdot\frac{l_1}{l_2} + m_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2){\dot{\varphi}_2}^2\Bigg\}
\end{aligned}
$$

上式で得られる $\ddot{\varphi}_1$，$\ddot{\varphi}_2$ をもとに数値解析してシミュレーションしたのが先のアニメである。

ここで φ_1，φ_2 が十分に小さいとし，$\sin\varphi_1 \fallingdotseq \varphi_1$ ，$\cos\varphi_1 \fallingdotseq 1$，$\sin(\varphi_1-\varphi_2) \fallingdotseq 0$ などの近似を行うと，先に連成振動として求めたのと同じ結果を得る。