

うなり (Beat)

振動数がわずかに異なる二つの振動が重なると、合成振動の振幅が周期的に大きくなったり小さくなったりします。この現象を「うなり」といいます。音のうなりはたまに聞くこともあると思いますが、うなりは音波だけに限りません。振動数がわずかに異なる二つの振動が重なるときの現象ですので、自然界ではいろいろな形のうなりが見られます。また、楽器の調律などにもうなりが利用されています。

<公式>

振動数が f_1 の音と振動数が f_2 の音が重なったとき、1秒間に聞こえるうなりの回数 F_B は

$$F_B = |f_1 - f_2|$$

という式で与えられる。

うなりを聴く

ココにマウスを合わせて下さい。振動数が $f_1 = 440\text{Hz}$ (ラジオやテレビの時報の振動数。“ラ”の音)と $f_2 = 441\text{Hz}$ の音のうなり音が4秒間聞けます (スピーカーのスイッチを入れて下さい)。うなりの回数は1秒間に $F_B = f_1 - f_2 = 1$ (回) です。

ただしうなりは、振動数がわずかに異なる音が重なったときに起きる現象で、振動数が大きく異なるときはうなりとして観測されません。たとえば、 $f_1 = 440\text{Hz}$ (“ラ”の音)の音と $f_2 = 349.23\text{Hz}$ (“ファ”の音)の音を同時に鳴らすと、その合成音はもはやうなりとしてではなく、“ラ”と“ファ”の和音として聞こえます。**ココ**にマウスを合わせて下さい。“ラ”と“ファ”の和音が4秒間聞けます。

<ハイレベルレクチャー> (うなりの数学的な説明)

たとえば次のような2つの単振動

$$y_1 = \sin(2\pi f_1 t)$$

$$y_2 = \sin(2\pi f_2 t)$$

の合成を考えよう。このときの合成振動 Y は、

$$\begin{aligned} Y &= \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) \\ &= 2 \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t \end{aligned}$$

となります。上式が、 $2 \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t$ なる第一因子と、 $\sin 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t$ なる第二因子との積の形になっていることに注意して下さい。

次ページの図1は $f_1 : f_2 = 4 : 3$ の場合で、赤色が y_1 を、薄い水色が y_2 を表します。その合成振動は図2の朱色のようになります。一見複雑な波形に見えますが、この場合、第二因子 $\sin 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t$ は図3のように、第一因子 $2 \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t$ は図4のようになります。図3と図4とをかけ算した結果が Y で、図5はその様子を表します。

このとき第一因子 $2 \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t$ (図 4) がきわめてゆっくりした変化をするため、第二因子 $\sin 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t$ (図 3) の変化が第一因子で押さえ込まれたような形になってしまいます。つまり、第一因子が全体の波形の大きさを決定付けていることになり、この第一因子 (の絶対値) が合成振動の 振幅 を与えることになるわけです。

合成振動の振幅が最大になる時間間隔 (うなりの周期) を T_B とする。ある時刻 t_0 に振幅が最大であったとすれば、次に振幅が最大となるのは時間 T_B 後ゆえ (以下では $f_1 > f_2$ と仮定する)、時刻 t_0 と $t_0 + T_B$ に第一因子の絶対値が最大になるとおいて、

$$2 \left| \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t_0 \right| = 2 \qquad 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t_0 = m\pi \quad (m : \text{整数}) \quad (1)$$

$$2 \left| \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} (t_0 + T_B) \right| = 2 \qquad 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} (t_0 + T_B) = (m + 1)\pi \quad (2)$$

$$(2) - (1) \text{ より,} \qquad (f_1 - f_2)T_B = 1 \qquad \text{うなりの振動数 } F_B = \frac{1}{T_B} = f_1 - f_2 \quad (3)$$

