

<反射の数学的説明>

一般に波の反射には、位相が π ずれる固定端反射と、位相のずれない自由端反射とがある。

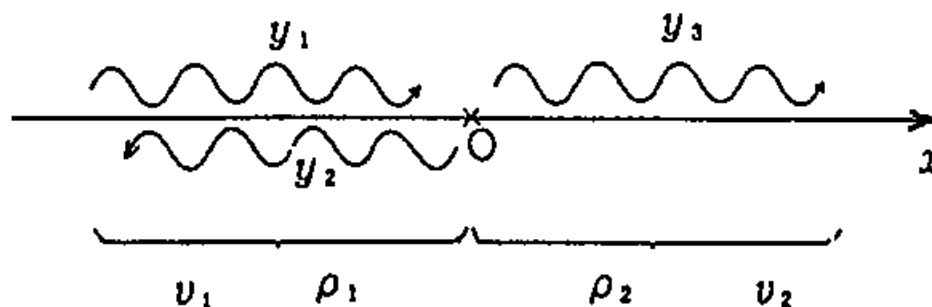
なお、透過波は、位相のずれを生じない。

<まとめ>

反射点において、

- 1° 自由端反射：常に入射波の変位と同じ向きに変位する反射→**位相のずれなし**
- 2° 固定端反射：常に入射波の変位と逆向きに変位する反射→ **π の位相のずれ**
- 3° 透過波（屈折波）：常に入射波と同じ向きに変位するように透過していく→**位相のずれなし**

いま、 x 軸上を伝わる 1 次元の波があるとする。ただし、原点 O では媒質が不連続になっており、 $x < 0$ では媒質 (S_1) の密度が ρ_1 、波の伝搬速度が v_1 、 $x > 0$ では媒質 (S_2) の密度が ρ_2 、波の伝搬速度が v_2 とする。波は $-x$ 方向から入射し、原点 O で波の一部が反射し、残りの一部はそのまま $+x$ 方向へ透過していく。入射波、反射波、透過波をそれぞれ、



$$\begin{cases} \text{入射波:} & y_1(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \\ \text{反射波:} & y_2(x, t) = B \sin \omega \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \\ \text{透過波:} & y_3(x, t) = C \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \end{cases}$$

ここで、 A 、 B 、 C はそれぞれの振幅を表す。ただし $A > 0$ であるが、 B 、 C については位相差 π のずれを生じる場合も考慮して、正または負の値のいずれかであるとする。

さてこのときこの媒質上を波動が入射してきたとき、次の 2 つの条件が満たされていなくてはならない。つまり、

- 1° 媒質の変位が、 $x = 0$ の点（2 つの媒質の接点）で連続していなくてはならない。（**変位の連続性**）
- 2° 媒質上のすべての点で、エネルギーの保存則が成立していなくてはならない。（**エネルギーの保存則**）

（エネルギー保存則の代わりに、変位の距離勾配の連続性を考えるのが普通だが、高校生にはエネルギーの保存則の方が理解しやすいと思われるので、ここではその立場で説明する。）

まず 1° について考えよう。 $x = 0$ の点でのそれぞれの波動による振動は、上式に $x = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned}
 y_1(0, t) + y_2(0, t) &= y_3(0, t) \\
 \therefore A \sin \omega t + B \sin \omega t &= B \sin \omega t \\
 \therefore A + B &= C \cdots \cdots (1)
 \end{aligned}$$

次に、 2° について考える。波動が単位時間に運ぶエネルギー量を、波の強さという。波の強さ I は、次式で与えられる。

$$I = \frac{1}{2} \times (\text{媒質の密度}) \times (\text{角振動数})^2 \times (\text{振幅})^2 \times \text{伝搬速度}$$

よって入射波、反射波、透過波の波の強さをそれぞれ I_1 , I_2 , I_3 とすると、 $x = 0$ の点における単位時間あたりについてのエネルギー保存則は、

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_2 + I_3 \\
 \therefore \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A^2 v_1 &= \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 B^2 v_1 + \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 C^2 v_2 \\
 \therefore \rho_1 A^2 v_1 &= \rho_1 B^2 v_1 + \rho_2 C^2 v_2 \cdots \cdots (2)
 \end{aligned}$$

(1) と (2) を連立させて、 B , C を A で表すと、

$$\begin{cases} B = -A \\ C = 0 \end{cases} \cdots \cdots (3) \quad \text{or} \quad \begin{cases} B = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A \\ C = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A \end{cases} \cdots \cdots (4)$$

(3) は透過波の振幅 C が 0 ということで、当初より透過波を否定している解であるからこれは不適。よって (4) が B , C を与える。

以上より、 $\rho_1 v_1$, $\rho_2 v_2$ の大小にかかわらず $C > 0$ であり、

透過波はいかなる場合においても位相のずれを生じない。

しかし、反射波は $\rho_1 v_1$, $\rho_2 v_2$ の大小によって、次の 2 つのケースがある。

$$\begin{cases} \rho_1 v_1 > \rho_2 v_2 \text{ なら, } B > 0 \longrightarrow \text{位相のずれなし (自由端反射)} \\ \rho_1 v_1 < \rho_2 v_2 \text{ なら, } B < 0 \longrightarrow \pi \text{ の位相のずれ (固定端反射)} \end{cases}$$

例 1 弦上を伝わる横波の場合：

弦を伝わる横波の速さ v は、弦の張力を T 、弦の線密度を ρ とすると、 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ という式で与えられるゆえ、

$$\begin{aligned}
 \rho v &= \rho \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\rho T} \propto \sqrt{\rho} \\
 \therefore B &= \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A \cdots \cdots (5) \\
 \therefore \begin{cases} \rho_1 > \rho_2 \text{ なら, } B > 0 \longrightarrow \text{自由端反射} \\ \rho_1 < \rho_2 \text{ なら, } B < 0 \longrightarrow \text{固定端反射} \end{cases}
 \end{aligned}$$

例2 音波（縦波）の場合：

$$\begin{aligned} \text{空気では, } \rho_1 &= 1.3\text{kg/m}^3, & v_1 &= 340\text{m/s}, \\ \text{水で, } \rho_2 &= 10^3\text{kg/m}^3, & v_2 &= 1.5 \times 10^3\text{m/s}, \\ \therefore \rho_1 v_1 &< \rho_2 v_2 & \therefore B &< 0 \end{aligned}$$

つまり空気中から水中に音波が入射する場合、反射音波は固定端反射となる。

例3 光波の場合：

光波の場合は、上記の議論をそのまま当てはめることはできないので、あくまでもその類推として理解しておいていただきたい。

光波は横波ゆえ、弦の場合を当てはめて考えよう。前記 (5) 式において、

$$v = \frac{\sqrt{\rho}}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad \therefore \sqrt{\rho} = \frac{1}{v}$$

の関係を使って v の式に書き直すし、さらに $n = \frac{v_1}{v_2}$ をもって $x < 0$ の領域の媒質に対する $x > 0$ の領域の屈折率と定義すれば、 B 、および C は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} A = \frac{1 - \frac{v_1}{v_2}}{1 + \frac{v_1}{v_2}} A = \frac{1 - n}{1 + n} A \\ C &= \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} A = \frac{2}{1 + \frac{v_1}{v_2}} A = \frac{2}{1 + n} A \end{aligned} \right.$$

このことから、屈折率 n が $n < 1$ ならば $B > 0$ 、つまり反射波は入射波と同位相、 $n > 1$ ならば $B < 0$ 、つまり反射波は入射波に対して位相が π ずれる。これに対して、 n の値によらず $C > 0$ であるから、透過波の位相はずれることはない。

このことを、光波を含む横波一般についてまとめると次のようになる。

- 1° 屈折率が大きい媒質から小さい媒質に向かって波が進むとき、反射波の位相はずれない。
→自由端反射
- 2° 屈折率が小さい媒質から大きい媒質に向かって波が進むとき、反射波の位相は π ずれる。
→固定端反射
- 3° 透過波（屈折波）：いかなる場合も位相のずれなし。

[ビジュアル物理へ](#)

[トップページへ](#)

[反射波・透過波のシミュレーションへ](#)