

スピーカーの物理学 II

音響インピーダンスと放射インピーダンス

はじめに

前講では過渡特性とインピーダンスについて電気回路と単振動系について述べたが、これは、スピーカーの振動板の運動を解析するのに有効だが、振動板が音を発し、耳に届くまでの過程を解析するには音の放射と伝搬に関する物理を学ぶ必要がある。ここでは、音の伝搬に関する音響インピーダンスと放射能力を決める放射インピーダンスについて解説する。少々煩雑な議論なので、途中の計算に興味のない方は最後の放射インピーダンスと指向性についての結論のみを知ってもらえば次講のスピーカーの特性の議論には事足りる。

1. そもそもインピーダンスとは？

コイルやコンデンサーを含む電気回路に交流電流を流したとき回路の両端に発生する電圧は $\tilde{V} = Z\tilde{I}$ と書け、直流の場合の抵抗値に相当する Z をインピーダンスという。一般に複素数で与えられ、実数成分が、電流と同位相の電圧を、複素成分が 90° 位相が異なる成分を与える。前講では、インピーダンスという概念が、同じ回路に、ある瞬間から直流電圧をかけたときに流れ出す電流変化、すなわち過渡特性と密接に関係しており、さらに、この関係式が、物体に力を与えたときの速度変化についても機械インピーダンスを定義することにより適用できることを示した。

実は、この関係式は、さらに一般的に、ある物理量 A を系に与えたとき、それに伴って他の物理量 B がどのように変化するかを記述するのに使える。いいかえれば、刺激に対する応答、原因に対する結果、あるいは入力に対する出力の関係を定量的に表すのに有効な手段である。数式的には、角振動数 ω ($=2\pi \times$ 振動数) で振動する入力 $\tilde{A}(\omega)$ に対する出力を $\tilde{B}(\omega)$ とした場合、それらを結ぶ関係式

$$\tilde{B}(\omega) = Z(\omega)\tilde{A}(\omega) \quad (\text{II-1})$$

の係数 Z をインピーダンスとして定義する。また、その系を構成する素子にコイル (インダクタンス L) やコンデンサー (キャパシタンス C) あるいは純抵抗 (R) を対応させることが可能で、電気系で L, C, R が構成する回路に対して成り立つオームの法則やキルヒホッフの法則などが適用できる。

ただし、この関係式が使えるのは系が線形である場合に制限される。すなわち、数学的には線形微分方程式で記述される場合で、結果として、出力に高調波成分、すなわち歪み成分を含まないことが条件となる。一般に、小振幅の場合は近似的に成り立ち、系の周波数応答特性を知るには有効な手段である。また、この場合逆の関係式

$$\tilde{A} = Z^{-1}\tilde{B} \quad (\text{II-2})$$

も成り立つ。この場合、 $Y = Z^{-1}$ をアドミタンスとよび、第 I 講 (36) 式に示した複素数の演算式により Z がわかれば計算出来る。従って、 B を入力、 A を出力とする場合にも適用できる。

以下、スピーカーの動作など音の伝達を記述するのに必要な、音響インピーダンス、放射インピーダンスなどを説明する。

2. 音響インピーダンス

これは音を伝える媒体 (気体、液体、固体) 中で垂直成分速度 v (入力) で振動する架空の面がその表面に作り出す圧力変化 Δp (出力)、すなわち音圧を与えるインピーダンスである。 v はその面と共に動く媒体の変位速度に等しいので、粒子速度と呼ばれる。しかし、これは、決して媒体分子の速度を表すものでなく、あくまで微小部分の変位速度でマクロ量なのできわめて誤解を与えやすい言葉であり、本講では粒子速度という言葉を使わず、変位速度と呼ぶことにする。

★「オーディオの科学」”電気の伝わる速さは”
<http://www.ne.jp/asahi/shiga/home/MyRoom/velocity.htm> 参照

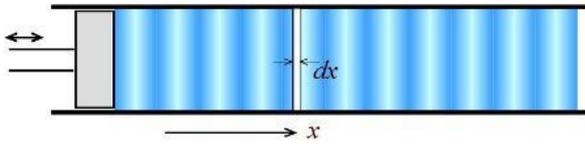
通常音響インピーダンスは圧力のかわりに、面積 S にかかる力 $S\Delta p$ と変位速度の比を取り、

$$S\Delta p = Z_A v \quad (\text{II-3})$$

で、定義する。単位面積当りの音響インピーダンス $Z_s = Z_A/S$ を比音響インピーダンスあるいは固有音響インピーダンスと呼び、媒体の種類と温度により決まる物質定数である。以下に示すように、これは媒体中の音速と密接に関係し、電気系ではケーブルの特性インピーダンスに相当する量である。

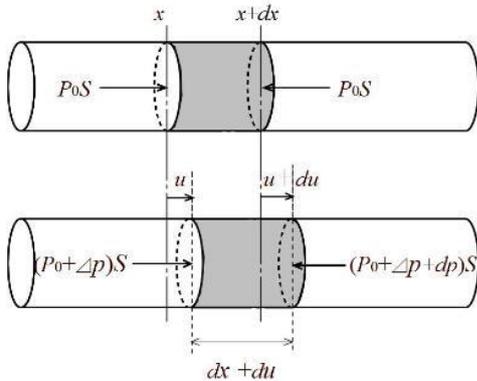
2.1 円筒管中の気体の音響インピーダンス

ここでは、(図 II-1 に示すような断面積 S 、長さ無限大の円筒管を伝わる音波の音響インピーダンスを導く。 S を無限に大きくすれば、平面進行波と見なせるので、これは平面波の固有音響インピーダンスに等しい。



(図 II-1 円筒中を伝わる音波。色の濃淡は空気密度あるいは圧力変化 Δp を表す。

(図 II-1 に示す厚さ dx の領域の運動方程式を立てるため、この部分を拡大したモデルを(図 II-2 に示す。



(図 II-2 円筒中の気体を伝わる音波。灰色部分について運動方程式を立て波動関数を求める。 S : 管の断面積、 P_0 : 音波がないときの平衡圧(大気圧)、 Δp : 音圧、 dp : 左面と右面の圧力差、 u : 平衡状態からの媒体の変位

はじめに、(図 II-2 の灰色部分の運動方程式を考える。気体の密度を ρ とすると、質量は $\rho S dx$ 、かかる力は両面の圧力差 \times 面積なので、

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -S dp = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \tag{II-3}$$

従って、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{II-4}$$

一方、気体の圧縮率を κ とすると、平衡圧からの圧力変化 Δp による体積変化率は $-du/dx$ なので、圧縮率の定義より、

$$\Delta p = -\frac{1}{\kappa} \frac{du}{dx} \tag{II-5}$$

x で微分して、

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{II-6}$$

これを、(II-4)式に代入することにより波動方程式

$$\rho \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{II-7}$$

を得る。よく知られているようにこの微分方程式を満たす解は、

$$u(x, t) = u_0 \sin(\omega t - kx) \tag{II-8}$$

で与えられる。これを、(II-7)式に代入すると、関係式

$$\rho \kappa \omega^2 = k^2 \Rightarrow \sqrt{\rho \kappa} \omega = k \tag{II-9}$$

が得られる。ここで、 ω は角振動数 $2\pi f$ 、 k は波数 $k=2\pi/\lambda$ (f : 振動数、 λ : 波長) なので、(II-9)式は

$$\sqrt{\rho \kappa} f = 1/\lambda \Rightarrow f \lambda = 1/\sqrt{\rho \kappa} \tag{II-10}$$

と書ける。一方、振動数、波長と音速(c)の関係式は

$$f \lambda = c \tag{II-11}$$

なので、(II-8)式は速度(位相速度) $c = 1/\sqrt{\rho \kappa}$ で伝搬する音波を表す式である。従って、(II-9)式は、

$$\omega = ck \tag{II-11'}$$

と書ける。この式は、(II-11)式と同等の関係式である。一般に波数の関数としての角振動数を分散関係とよび、波動力学で重要な役割を果たす関係式である。

音圧変化 Δp は(II-5)式より、

$$\Delta p = \frac{1}{\kappa} k u_0 \cos(\omega t - kx) \tag{II-12}$$

変位速度は定義より、

$$v = \frac{du}{dt} = \omega u_0 \cos(\omega t - kx) \tag{II-13}$$

従って、平面進行波の音響インピーダンスは、

$$Z_A = \frac{S \Delta p}{v} = \frac{kS}{\kappa \omega} = S \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} = S \rho c \tag{II-14}$$

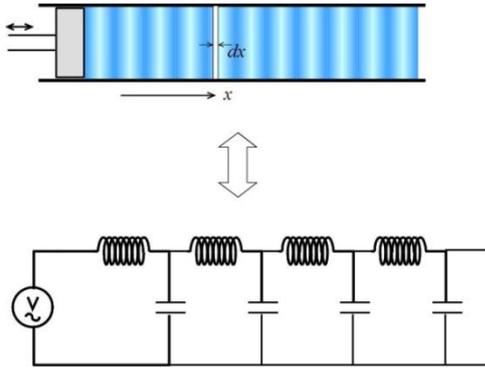
固有音響インピーダンスは

$$Z_s = \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} = \rho c \tag{II-15}$$

で与えられる。 S を無限に大きくすれば平面波の伝搬に相当し、 Z_A は実数なので音圧と変位速度の間に位相のズレは生じない。音響インピーダンスは音波の伝搬を論じる際には重要な意味があるが、スピーカーの物理を論じるに際してはそれほど重要でない。ただ、電気系において直流抵抗値が無視できるケーブルの特性インピーダンス $Z_0 = \sqrt{L/C}$ (L, C は単位長さ当りのインダクタンス、キャパシタンス) に相当する量で、密度 ρ に対しては L が、圧縮率 κ (体積コンプライアンス) に対しては C が対応していることに注目されたい。従って、インピーダンスのミスマッチがあれば電気系と同様音波の反射が生じる。

★「オーディオの科学」”分布定数回路”
<http://www.ne.jp/asahi/shiga/home/MyRoom/coaxialcable.htm> 参照

(図 II-3 にその等価回路を示す。



(図 II-3 パイプを伝搬する音波 (=平面進行波) の等価回路 (分布定数回路)

2.2 3次元の波動方程式と速度ポテンシャル

実際の音源から放射される音は平面波ではなくむしろ点音源から放射される音、すなわち球面波に近い。スピーカーではほぼ平板から放射されるわけであるが、少しは離れた位置からみればむしろ球面波に近い。一般の場合は面上に並べた点音源から発せられる音の重ね合わせとして計算する (重ね合わせの原理が成り立つのは線形系のもう一つの重要な特質である)。従って、3次元空間での音の伝搬を記述するには点音源あるいは呼吸球から発する音波の音響インピーダンスを知る必要がある。そのため、変位 u についての波動方程式(II-7)を圧力についての式に変換する。

まず、 x 方向の変位速度を v_x として運動方程式(II-4)を

$$\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II-16})$$

書き改め、さらに x で微分すると、

$$\rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (\text{II-17})$$

圧縮率を与える(II-6)式を t で微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (\text{II-18})$$

さらに、 t で微分すると、

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{II-19})$$

(II-17)式、(II-19)式より $\frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x}$ を消去し、さらに、音速を与える式、 $c^2 = 1/\rho\kappa$ を使うと、 p についての波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{II-20})$$

が得られる。これを3次元に拡張することにより、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{II-21})$$

と、圧力変化 p についての3次元波動方程式を得る。これを、与えられた境界条件で解くことにより、音圧すなわち音波についての波動関数が得られる。

実際に解くに当たっては、少し抽象的で分かりにくい量であるが、後の計算を容易にするため、その微分が変位速度を与える位置 (x,y,z) のみの関数で、スカラー量である速度ポテンシャル $\phi(x,y,z)$ を導入する。すなわち、

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{II-22})$$

とする。

p と ϕ の関係を得るため、この式を使い、まず、運動方程式(II-16)を x について積分すると、

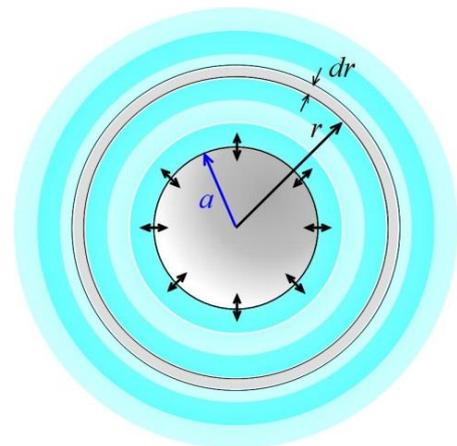
$$\Delta p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II-23})$$

を得る。同様に、波動方程式(II-21)は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{II-24})$$

で表わせ、これを解くことにより、任意の位置について(II-23)式より音圧 Δp 、(II-22)式より変位速度 \mathbf{v} 、従って音響インピーダンスを求めることが出来る。

2.3 球面波の波動関数と音響インピーダンス



(図 II-4 呼吸球と球面波)

(図Ⅱ-4に示すように、半径 a の球の表面が、半径方向に振動する、すなわち膨張・収縮を繰り返す発音源を考える。これを呼吸球と呼び、呼吸球の外部での波面は球状で球面波という。半径 a を小さくしていくと点音源と見なすことが出来、後に示すように任意の平面から出る音を、点音源を平面上に配列したものとみなし計算するのでこのモデル音源から得られる結果は重要である。

なお、点音源は空間中の微小な孔から流体が等方的に湧きだし、吸い込まれることと同等と見なせるが、流体の体積変化を

$$q(t) = q_0 \sin \omega t \quad (\text{II-25})$$

としたとき、流体が非圧縮性であれば、湧きだし点を中心とする半径 r の球面を横切って出入りする流体の半径方向速度 v_r は体積不変の条件により、

$$\tilde{v}_r = \frac{q_0}{4\pi r^2} \sin \omega t \quad (\text{II-26})$$

となる。

球面波の波動方程式を解くに当たっては、極座標に変換するのが便利である。さらに、球対称性があるので角度成分は省略でき、動径成分についてのみ解けばよい。速度ポテンシャルについての波動方程式(Ⅱ-24)を極座標系の微分方程式に変換すると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{II-27})$$

となるが、この方程式は次のように変形できる。

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} \quad (\text{II-27})$$

$r\phi$ を波動関数と見なせば、(Ⅱ-27)式は平面波の波動方程式(Ⅱ-7)と同型であり、解は

$$r\phi = \phi_0 \sin(\omega t - kr) \quad (\text{II-28})$$

で与えられる。従って、速度ポテンシャルは

$$\phi(r) = \phi_0 \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \quad (\text{II-29})$$

で与えられ、これを複素数表示にすると、

$$\tilde{\phi}(r) = \phi_0 \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{II-30})$$

と求まる。以下、計算を簡略化するため、複素数表示を採用する。(Ⅱ-30)式より、半径方向の変位速度は速度ポテンシャルの定義より、

$$\tilde{v}_r = -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} = -\phi_0 \frac{1+ikr}{r^2} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{II-31})$$

ここで、 ϕ_0 の値を、(Ⅱ-25)式で与えられる点音源の流体湧き出し量(体積速度)に対応するよう定めると、(Ⅱ-25)、(Ⅱ-26)式に対応する複素速度は

$$\tilde{q}(t) = q_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II-32})$$

$$\tilde{v}_r = \frac{q_0}{4\pi r^2} e^{i\omega t} \quad (\text{II-33})$$

と書け、速度ポテンシャルの定義より

$$\tilde{\phi}(r) = \frac{q_0}{4\pi r} e^{i\omega t} \quad (\text{II-34})$$

でなければならず、従って $\phi_0 = -q_0/4\pi$ と定まる。圧縮性の場合には密度波となって伝搬するので、速度ポテンシャルは

$$\tilde{\phi}(r) = \frac{q_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{II-35})$$

従って、変位速度は

$$\tilde{v}_r = -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} = \frac{q_0}{4\pi} \frac{1+ikr}{r^2} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{II-36})$$

となる。ここで、非圧縮流体の場合は波長無限大、すなわち $k \rightarrow 0$ の波動と考えればよい。音圧は(Ⅱ-23)式より、

$$\Delta \tilde{p} = \rho \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \frac{q_0}{4\pi} \frac{i\rho\omega}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{II-37})$$

(Ⅱ-11')式より $\omega = ck$ なので、複素数表示による球面波の比音響インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{\Delta \tilde{p}_r}{\tilde{v}_r} = \frac{ikr}{1+ikr} \rho c \\ &= \frac{\rho c}{1+k^2 r^2} (k^2 r^2 + ikr) \end{aligned} \quad (\text{II-38})$$

で与えられる。平面波の場合との大きな違いは複素成分、すなわち位相遅れ成分があることであり、これは平面波の場合と異なり、波が進行するとともに波面が広がることによると考えて良い。なお、音源から十分離れた位置、すなわち $r \rightarrow \infty$ の極限では波面は平面になり、固有音響インピーダンスも $Z_r \rightarrow Z_s = \rho c$ と平面波の値に等しくなる。なお、関数形は次節に述べる呼吸球の放射インピーダンスと同型である。

3 放射インピーダンス

放射インピーダンスとは振動板の速度 \tilde{v} (=振動板表面の変位速度) を入力とし、振動板が気体を押すことによって生じる反作用力 \tilde{F} を出力とするインピーダンスである。すなわち、

$$\tilde{F} = Z_r \tilde{v} \quad (\text{II-39})$$

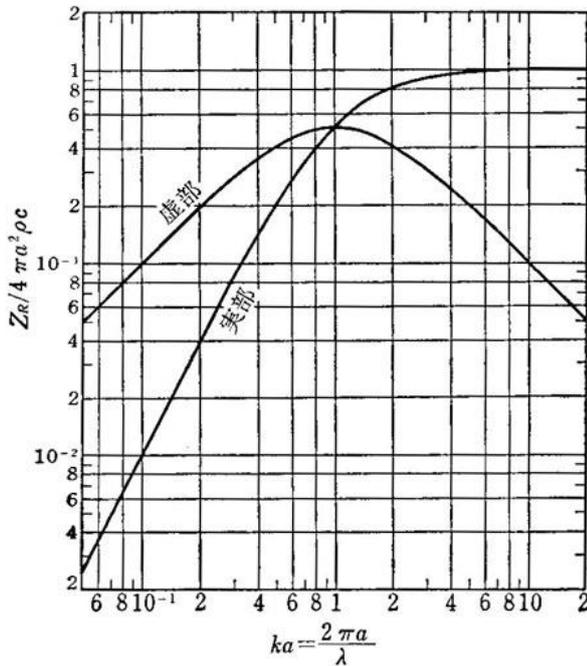
で定義される量である。これは、機械的振動が音波に変換される効率を表す量であり、スピーカーの特性を論じるに当たって重要である。

3.1 呼吸球の放射インピーダンス

図4のような半径 a の呼吸球の表面が受ける力は表面での音圧 Δp に表面積を掛けた量なので、

$$Z_R = 4\pi a^2 \frac{\tilde{p}}{\tilde{v}_r} = \frac{4\pi a^2 \rho c}{1 + (ka)^2} \left\{ (ka)^2 + ika \right\} \quad (\text{II-40})$$

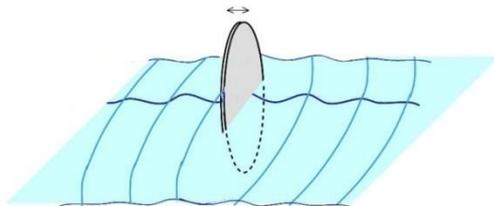
となる。実数部を放射抵抗と呼び、音圧と変位速度が同位相なので音響エネルギーの放射に寄与する成分である。虚数部は放射リアクタンスとよび位相が90度ずれた成分なので音響エネルギーに寄与しない。(図II-5に表面積 $\times \rho c$ で規格化した放射抵抗および放射リアクタンスの $ka = 2\pi a/\lambda$ 依存性を示す。



(図II-5 呼吸球の放射インピーダンス)

$2\pi a$ は球の外周長なので、波長が外周長に等しくなったところで実部と虚部の大きさが反転する。すなわち、これより小さい球では放射効率が著しく低下する。

3.2 円盤の放射インピーダンス

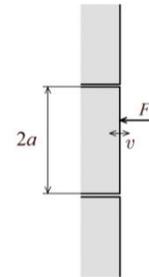


(図II-6 大皿で水面に波を立てる)

円盤を前後に振動させたとき空気から受ける反作用力と振動板の振動速度の比が円盤の放射インピーダンスであるが、これがスピーカーの周波数特性を

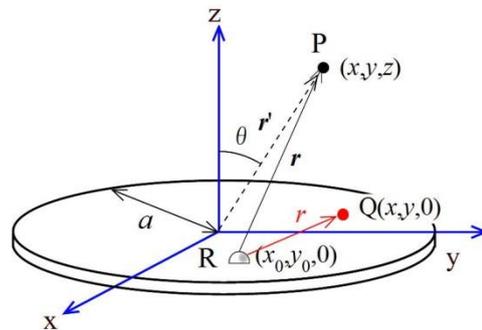
決める大きな要因であり少し詳しく調べる。具体的に計算するのは少々面倒であり、始めに以下のような実験を体験してみるとよい。

口径の違うスピーカーの振動板に見立てて、大きな皿と小さな皿を用意し、(図II-6に示すようにこれを大きな水槽に垂直に半分ほど入れ前後に動かしてみる。どちらも同じ振幅、振動数で比較してみよう。そうすると、当然のことながら大きなお皿の方が大きな波が立ち、動かすのに大きな力がある。小さな皿の場合はその逆となる。この違いが円盤の放射インピーダンスの差である。また、ゆっくり動かした場合(低音に相当)、小さな皿では前面の水はあまり持ち上がらず横に流れてしまい小さな波しか立たないが、速く動かした場合(高音に相当)それなりに波が立つ。それに対し大皿の場合はゆっくり動かした場合も波が立つ。以上はあくまで類推であり、実際のスピーカーの放射インピーダンスを計算するには少々面倒な計算が必要である。



(図II-7 バッフルに付けた円盤)

空気中で円盤を前後に振動させると前面に放射される音圧と後方への音圧の位相が逆であり、そのままだと前後の圧力が相殺し放射能力が落ちてしまう。そこで、前後の音圧を遮断するため、振動板をバッフル板に取り付ける。実際のスピーカーでは箱の中に入れるわけであるが、振動板の運動に影響を与えないように、ここでは(図II-7に示すような無限大の面積を持つ平面のバッフルを用いる。



(図II-8 半径 a の円盤の R 点においた微小球音源が P 点に及ぼす影響を計算するための座標。放射インピーダンスの計算には P 点を円盤表面にとる。(Q 点 $z=0$)

計算に当たっては、無限大バツフルに埋め込んだ半径 a の円盤発音体を上向きに置き、中心軸を z 方向とし、上方に放射される音の強さを見積もる。そのため、(図 II-8 に示すように、円盤を、平面上においた無数の微小呼吸球音源の集まりとみなし、座標 $(x_0, y_0, 0)$ で表せる A 点にある音源から発生する球面波が距離 r 離れた P 点に作る速度ポテンシャルを計算し、その結果から(II-22)、(II-23)式から変位速度、音圧を求めるという手法をもちうる。

このとき、放射インピーダンスは円盤表面での音圧 (×面積) と変位速度との比なので、(1)面上にある面積 dS の微小領域 (図 II-8 の Q 点) が円盤面上の他の領域 (R 点 面積 dS_0) から受ける速度ポテンシャル $d\phi$ を求め、(2)まず R 点について円盤の全領域について積分し、(3)さらに Q 点について積分するという方法によって、円盤が受ける力を算出する。このとき、開口部面積 dS_0 の小孔からわき出す流量は円盤の振動速度を $\tilde{V} = V_0 e^{i\omega t}$ とすると、 $\tilde{q} = \tilde{V} dS$ で与えられ、かつ流体はバツフル板の前面のみに放射されるので、R 点の微小音源が Q 位置に作る速度ポテンシャルは(II-30)式より

$$d\tilde{\phi}(r) = \frac{V_0}{2\pi r} e^{i(\omega t - kr)} dS_0 \quad (\text{II-41})$$

で与えられる。ここで、 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 従って、全振動面が Q 位置に作り出す速度ポテンシャルは(II-41) を半径 a の全振動面に渡って積分して、

$$\tilde{\phi} = -\frac{V_0}{2\pi} \iint_{\text{全表面}} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS_0 \quad (\text{II-42})$$

と求まる。点 Q の音圧は(II-23)式より、

$$\Delta\tilde{p} = \rho \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = i\rho\omega\tilde{\phi} \quad (\text{II-43})$$

となる。さらに、 Δp を円盤面で積分して振動面全体に働く力が次式で求まる。

$$\tilde{F} = \iint_{\text{円盤表面}} \Delta\tilde{p} dS = i\omega\rho \frac{\tilde{V}}{2\pi} \iint_{\text{円盤表面}} dS \iint_{\text{円盤表面}} \frac{1}{r} e^{-ikr} dS_0 \quad (\text{II-44})$$

この積分の実行は少々面倒で、結果のみ記すと

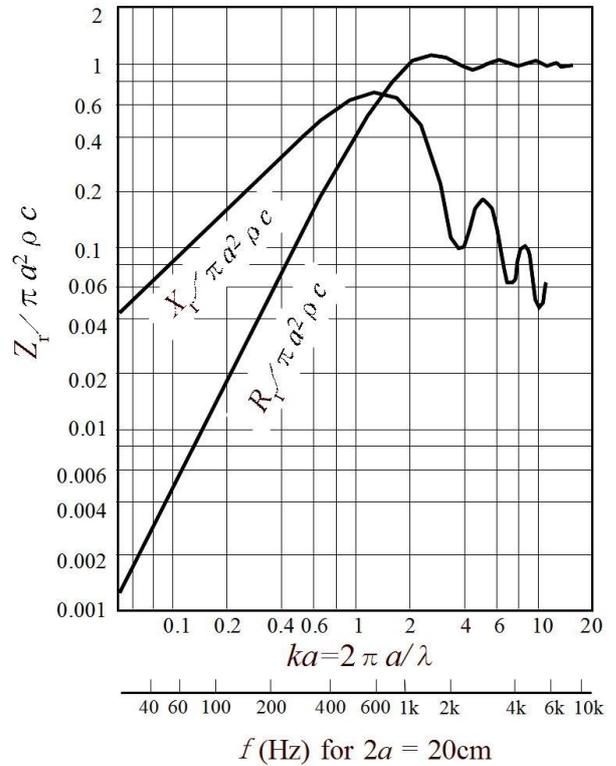
$$\tilde{F} = \pi a^2 \rho c \left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{K_1(2ka)}{2(ka)^2} \right] \tilde{V} \quad (\text{II-45})$$

で与えられる。ここで、 c は音速、 J_1 は第 1 種のベッセル関数、 K_1 はストループ関数である。従って、円盤の放射インピーダンス $Z_r = \tilde{F}/\tilde{V}$ は

$$Z_r = \pi a^2 \rho c \left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{K_1(2ka)}{2(ka)^2} \right] \quad (\text{II-46})$$

$$\equiv R_r + iX_r$$

となる。(図 II-9 はこれを円盤の面積× ρc で規格化し、 ka の関数としてプロットしたものである。



(図 II-9 円盤の放射インピーダンス 下目盛は 20cm 径($a=0.1\text{m}$)の円盤に対する周波数

横軸は波数 k と円盤の半径 a の積で与えられているが、これは波数の定義より $ka = 2\pi a/\lambda = a\omega/c$ (λ : 波長、 ω : 角振動数) と周波数依存性を与える量である。(図の下側に具体的に直径 20cm の円盤に対応する周波数スケールが示してある)。左側の低音部ではグラフはほぼ直線に載る。両対数グラフなのでこれは R_r が ka のべき数で表せることを意味し直線の勾配から放射抵抗は振動数の 2 乗に比例して増加することがわかる。このことは、ベッセル関数のべき展開式からも導ける。 $ka \sim 2$ の辺りで増加傾向は終了し振動しながら一定値=1、すなわち、 $R_r = \pi a^2 \rho c$ に収斂する。この値は、(14)式で示した平面波の音響インピーダンスに等しく、物理的には、円盤の円周長が波長に一致する辺りから、有限半径の円盤からの放射も無限大半径の平板からの放射に近づく。これらのことは、次講で述べるダイナミックスピーカーの音圧一周波数特性を論じるに当たって重要な因子となる。

一方、放射リアクタンス X_r は $ka < 1$ で振動数 ω に比例し、これは電気系の L-R 回路のインピーダンス $Z = R + i\omega L$ 、従って、機械インピーダンスの $i\omega M$ 項と等価である。すなわち、放射リアクタンスは振動板に対する空気付加質量 M_a を与える。その大きさは K_1 関数の展開式から

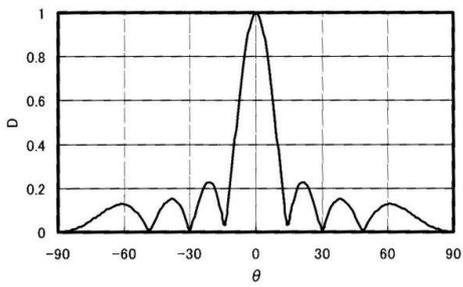
$$X_r \approx \omega M_a, M_a \approx \frac{8}{3} \rho a^3 \quad (\text{II-47})$$

と与えられる。ここで ρ は空気の密度である。ただし、スピーカーのように両面負荷だとこの2倍になる。具体的に 20cm 径について計算すると 6.4 g となり無視できない値となる。この項は直接には音響放射に寄与せず、共振周波数 f_0 や過渡特性に影響する。当然この寄与は $ka > 2$ では減少し消失していく。

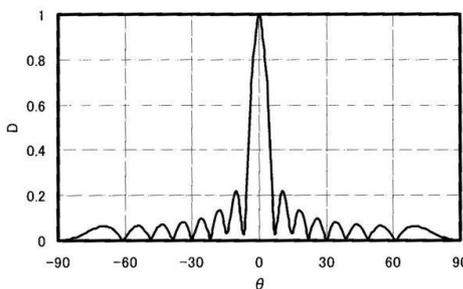
4. 放射の指向性

スピーカーの音は高音域で鋭い指向性を示すことは誰しも経験的に知っているだろう。その原因は波の干渉で容易に理解できる。「オーディオの科学」でも、ステレオ再生に使用する2つのスピーカーから出る音は、聴く位置が中心位置から少しずれると、再生音の周波数特性に鋭いディップが生じることを示し、その周波数は音路差による干渉効果でよく説明出来ることを示した。

<http://www.ne.jp/asahi/shiga/home/MyRoom/position.htm>



(a) $d = \lambda/2, n = 8$



(b) $d = \lambda/2, n = 16$

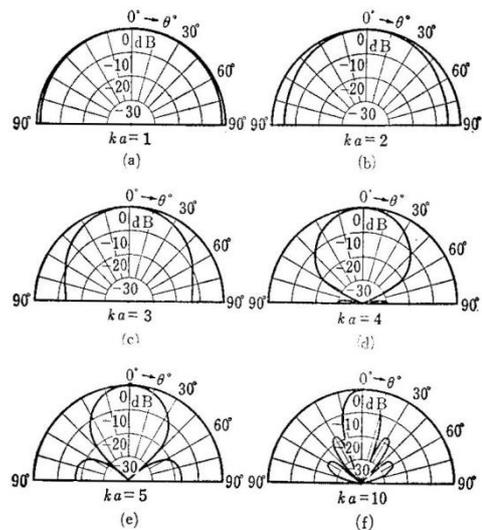
(図 II-10) n 個の音源を等間隔に並べた場合の指向特性。測定位置は音源の列を含む平面内にあり音源から十分離れた位置とする。 θ は中心軸からの角度。周波数(波長)は音源の間隔(d)の2倍とする。干渉によりディップが生じるのがわかる。

さらに、複数のスピーカーを横並びに等間隔で置くと、(図 II-10 に示すように中心軸から外れると干渉により音が打ち消し合い音圧強度が減少しかつ周期的にディップが生じる。

平板音源から発生する音の指向性を求めるには、小音源を平面上に無数に並べたものとみなし計算すればよい。具体的には図 8 において P 位置の音圧を求めればよく、(II-42) 式において、

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} \quad \text{とおき、速度}$$

ポテンシャルを求め、(II-43)式より任意の位置での音圧を計算すればよい。ただし、計算は $r \gg a$ の条件下での近似式である。図-11 にいくつかの ka に対しての計算結果を示す。 ka が大きくなると、すなわち周波数が高いほど鋭い指向性が生じることがわかる。また、表 2-1 に口径の違った円盤に対応する周波数を示すが、例えば、鋭い指向性を示す(f) ($ka=10$) に対応する周波数は口径が大きいほど低周波側にシフトすることがわかる。従って、スピーカーとしては好ましくない鋭い指向性を避けるには小さい口径のスピーカーを使う必要がある。



(図 II-11) 色々な周波数でピストン運動する円盤の放射指向性。曲線は等音圧曲線。 ka と周波数の対応は表 2-1 に示す。ただし、 $r \gg a$ とする。

ka	円盤の直径 $2a$ (cm)		
	10	20	30
1	1080	540	360
2	2165	1080	720
3	3250	1625	1085
4	4330	2165	1445
5	5415	2710	1805
10	10830	5415	3610

表 2-1 いろんな口径の円盤についての ka の値と周波数の対応。単位は Hz