

効用をベクトルとしてとらえる新たな効用関数の提案

A proposal of alternative utility function in which utility is treated as vector

要旨

N-M 効用関数は、効用をユークリッド幾何学アナロジーから、効用を直線上の点としてとらえている。この単純化により、効用関数は、複数の要素をもつ選択肢の選好、例えば、コーヒー、紅茶、ジュースの選好順位に、価格情報が加わったときの影響の分析の手助けにはなってくれない。また、このモデルでは、原点を特定する必要がない反面、現状を意志決定モデルに反映できない。本稿では、効用を直線ではなく、ベクトルとしてとらえ、効用関数として活用できる可能性を考察する。空間ベクトルから考察を始めるが、理論的にはベクトル空間の概念を用い、 n 次元に拡張も可能である。

Abstract

The concept of utility of von Neumann and Morgenstern treated utility as position on a line, in analogy of Euclidean geometry. This simplification does not help analyzing the preference which have multi-criteria. Moreover, this simplicity make N-M model not to need to specify the original point, at the same time, however, make it difficult to take "status quo" of utility into count in the decision model. This paper seeks the possibility to treat utility as vector, not as position on a line, and utilize it in utility function. The paper start analysis from Euclidean vector (three dimension) but it can be widened to n -dimension by using the concept of vector space.

1 はじめに

期待値を使って効用を表現できるノイマンーモルゲンシュテルン（以下「NM」という。）は、その著書の中で、コーヒー、紅茶、ミルクという事象を選択するときの効用を数として表現できることを目指し、効用関数を考案した。効用関数の定義にあたり、NM は、ユークリッドによる、数値的距離を導き出す古典的方法のアナロジーを採用した。この方法では、 u と v は、原点からの距離であり、 u と v の間の直線上に ω があることを前提にして、その距離 ω を u と v の間の相対的な位置関係 $0 < \alpha < 1$ で表すものである。

NM 効用関数では、例えば、 $u < \omega < v$ という選好順序を持つ事象を、 u が α という確率、 v が $1 - \alpha$ という確率で発生する結合された事象による効用と、 ω による効用が等しくなる特定の α を、人間は見つけることができるという仮定により、 $\omega = \alpha u + (1 - \alpha)v$ という結合演算を与えることができることを前提としている。

この α は、2つの事象がある確率で発生する異

なる事象による確率で表現される効用の「重み」というべきものであるが、その算出に当たっては、それぞれの事象は、複数の要素を持っている分集合であるが、複数の要素を総合して、一つの効用を構成すると考えており、複数の要素が独立して効用を持っていることを想定していない。

わかりやすい例でいえば、ある事象が品質と価格という2つの要素で構成されたとすると、通常、品質は独立して効用をもたらすし、価格も独立して効用を表すことができる。NM は、それら要素を総合して、一つの効用として人間は認知できる、という仮定を置いているのである。では、それぞれの独立した効用を、どのようにして一つの効用にまとめるのであろうか。

本予稿では、2でNMによる公理系を整理し、3で重み α に関する新たな公理系の提案を行い、4で3に基づくあらたなモデルの提示と今後検証すべき事項を示す。6では、若干の応用例を示す。

2 NMによる効用関数の公理系

NMにおいては、 α を特定するための公理系は明確には定められていない。一方、 α が存在する場合に満たすべき公理は多数指定されている。ここでは、 α を導出するために必要な部分だけを抜き出すことにする。

(1.0.1) 定義： $\omega = \alpha u + (1 - \alpha)v$, ($0 < \alpha < 1$)は、それぞれ重み α , $1 - \alpha$ を付与した効用 u, v の重心、あるいは効用 u を確率 α で、効用 v を確率 $1 - \alpha$ で選ぶという結合を表す。

(1.0.2) 定義：効用 u, v は、座標又は0を基点とするベクトルである。3次元ユークリッド空間を前提とすれば、(1.0.1)は以下と同値。

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \alpha(u_1, u_2, u_3) + (1 - \alpha)(v_1, v_2, v_3)$$

(1.1) 効用 u と v は全順序関係である。

(1.2.1) $u < v$ ならば $u < \alpha u + (1 - \alpha)v$

$$u > v \text{ ならば } u > \alpha u + (1 - \alpha)v$$

(1.2.2) $u < \omega < v$ のとき $\alpha u + (1 - \alpha)v < \omega$ をみたす α が存在し、 $u > \omega > v$ のとき、 $\alpha u + (1 - \alpha)v > \omega$ をみたす α が存在する。

(1.3.1) $\alpha u + (1 - \alpha)v = (1 - \alpha)v + \alpha u$

(1.3.2)

$$\alpha(\beta u + (1 - \beta)v) + (1 - \alpha)v = \alpha\beta u + (1 - \alpha\beta)v$$

3 重み α の公理系の新たな提案

(1) 公理系

(2.1) 定義：ベクトルは、原点からの距離とする。すなわち、原点が (s_1, s_2, s_3) であったとすると、それぞれのベクトルは、以下と同値となる。

$$(u_1 + s_1, v_1 + s_1), (u_2 + s_2, v_2 + s_2), (u_3 + s_3, v_3 + s_3)$$

(2.2) 定義：3つのベクトル要素 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$ それぞれが、独立して効用を決定できる。

すなわち、 $\omega_i = \alpha_i u_i + (1 - \alpha_i)v_i$ $i = (1, 2, 3)$

(2) 意味

(2.1)は、NMはもともと数値距離の決定方法のアナロジーであることから、 u, v は原点からの距離であり、ベクトル又は座標で表す。このため、ベクトルの性質から当然に満たされるものであるが、原点の存在を明確にするためにあえて定義した。

(2.2)は、(1.0.2)で示すように、NMが前提としている、ベクトルの全ての要素がそろって初めて効用が決定されるという定義を、それぞれのベクトルの要素ごとに独立で効用が決定可能となるように拡張したものである。品質と価格という2つの要素を例にとれば、品質は単独で効用を決定できるし、価格も単独で効用を決定できる。この公理により、より実態にあった意思決定のモデリングが可能となる。(2.2)とNMの(1.0.2)は、一次元ベクトルの場合には一致する。また、NMの(1.0.2)は、すべての α_i が同じであるという(2.2)の特別の場合ということもできる。

4 新たなモデルとその検証の方向性

(1) NM効用関数

3の公理から、(3.1)と(3.2)の性質を持つ、 ω からある数の集合への写像 $\omega \rightarrow f(\omega)$ が存在することが導かれる。

(3.1) $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$

(3.2) $f(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v)$

この写像は、正アフィン変換が可能である。

(3.3) $f'(u) = \omega_0 f(u) + \omega_1$

(2) 重み α に関する新たなモデル

ここで、この文章の主題である、次元またはベクトルの要素ごとに個別の α を持つ効用 ω を、いかにして一つの統合された α を持つ ω に統一するのか、という問題を考えてみたい。公理(1.3.2)に着目する。これは、2段階の結合、すなわち、最初に β 、 $1 - \beta$ と結合し、次にそれを α 、 $1 - \alpha$ で結合することは、一つの演算、 $\alpha\beta$ 、 $1 - \alpha\beta$ で結合したものと同一になることを示している。結合演算が、重み α による効用の特定であることを考えると、複数の重みによる結合演算を多段階に行って、最終的に一つの重みに統合する方策を示しているともいえる。すなわち、

(4.1)

$$\alpha_2(\alpha_1 u + (1 - \alpha_1)v) + (1 - \alpha_2)v$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 u + (1 - \alpha_1 \alpha_2)v$$

$$\alpha_3(\alpha_1 \alpha_2 u + (1 - \alpha_1 \alpha_2)v) + (1 - \alpha_3)v$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 u + (1 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)v$$

(3) 検証の方向性

a) (3.3)は、NM の公理およびそれに基づく写像から導き出される。ここからわかるように、効用関数を正アフィン変換しても、 α の値、つまり、効用の数値関数の位置関係は変動しないことを示している。これにより、効用関数は自由に原点と単位を設定できるとされてきた。ただし、(3.3)は、効用の数値関数（効用関数）の性質を示しているだけで、「効用」の性質を示しているわけではないことに留意する必要がある。つまり、効用そのものの正アフィン変換を許しているわけではない。従って、定義(2.1)で示される効用と原点の関係により、効用の原点の変動が α の変動につながることは否定されない。これについては、6の応用例で若干の分析を行う。

c) (4.1)は、定義(2.2)を前提とすれば、公理(1.3.2)から導き出されるが、公理(1.3.2)は一次元の世界で、同じ効用の組である u と v の間の選択を多段階に繰り返した場合の性質を定義しているものであり、定義(2.2)のように、ベクトルの要素ごとの α による多段階選択を想定して作られたものではない。従って、そのまま使用できるかどうかについて、慎重な検討が必要である。

5 応用例

(1) 個別ベクトルの α に関する応用例の設定

ここで、5に示した新たなモデルを使った分析の例を提示する。ある製品を購入するに当たり、購買担当者は複数の企業から1社を選び、契約しなければならない。買うものは製品であるが、契約先を決定する際に考慮すべき要素として、①品質、②価格、③納期の3つがあるとする。この3つの要素全部を考慮して一つの効用が導き出されるが、要素個別においても効用を特定することは可能である。例えば、使用者としての観点から品質の高低のみによって効用は特定できる（ユーザーは品質しか見ない）し、会計担当者としての観点から価格の高低のみによっても効用は特定できる（品質に関わらず、予算を超えてしまえば買えない）。納期も同様である（特定の時期にのみ

必要な製品であれば、納期に遅れたらすべて終わりである。）。

(2) 応用例の分析

価格に関してのみ分析する。価格による効用を特定するための α の算出は、(2.2)によるが、同一品質を前提とすれば価格の低い方の効用が高くなる。従来はここまでしか分析できなかったが、定義(2.1)から、原点である「所持金」という概念を導入できる。これにより、効用は価格ではなく、「購入後の残高」により特定されることとなる。

(3.2)と(2.1)より、

$$\begin{aligned} f(\alpha(u_1 + s_1) + (1-\alpha)(v_1 + s_1)) \\ = \alpha f(u_1 + s_1) + (1-\alpha) f(v_1 + s_1) \end{aligned}$$

左辺の $\alpha(u_1 + s_1) + (1-\alpha)(v_1 + s_1)$ を考える。ここで、「効用低減の法則」、つまり、効用が高くなってくると、単位あたりの効用の数値関数の増加率が低下してくるという法則を導入する。所持金が非常に多量で、 v_1 、 u_1 のいずれを購入しても、残高にほとんど影響がない場合、両者の選好はニュートラルである $\alpha = 0.5$ に近づくはずである。一方、所持金がそもそも高額商品である v_1 を購入すると残高が0になってしまう状態では、選好は著しく u_1 に近づくはずである（ α は0に近づく）。両辺について α は共通であることから、この影響は、効用関数表現の右辺にも同様にもたらされることになる。

(3) 今後の展開

(2)での若干の分析のように、①品質、②価格、③納期といった各要素ごとの重み α を現状に応じ、定性的にでも特定できるようになれば、4で示した複数の α を統合する手法を使い、経済行為の意志決定についてより詳細な分析の可能性が開けてくる。

おわりに

NM 効用関数は、ミクロ経済学においては、欠かすことのできない重要なツールである。しかし、その効用表現は非常に単純であり、実際の意志決定で普通に行われている、複数の要素を組み合わせた効用の分析、あるいは、それらの分析に当た

って、現状との関連性を十分に表現することができない。この予稿では、この効用関数を多次元的な意志決定に拡張するための基礎的な問題点の抽出とそれに対する提案の提示を行った。今後は、今後、4（3）に示した事項について検証を行いつつ、5で定性的に分析した α の特定方法につい

ても、研究が必要である。

引用文献

von Neumann J. and Morgenstern, O. (1944).
Theory of Games and Economic Behavior,
Princeton University Press, Princeton