距離空間の位相的性質
虎の巻
パートII

西 村 尚 史

1　開集合・閉集合と完備性や連続写像との関係

定理 1.1 (X, d) を完備距離空間とし、S を X の閉集合とすると、(S, d) は完備距離空間になる。

(証明)　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を (S, d) のコーシー列とする。すると、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は (X, d) のコーシー列でもある。(X, d) は完備距離空間なので、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は (X, d) の収束列となる。すなわち、

$$\exists x \in X \text{ such that } \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

S は X の閉集合であり、$x_n \in S$ for $\forall n \in \mathbf{N}$ なので、虎の巻パート I 定理 3.1 より、

$$x \in S$$

よって $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S の中に収束する収束列となり、(S, d) は完備距離空間となることがわかる。　□

この定理により、完備距離空間が一つあれば多くの完備距離空間がそれから作られることがわかる。虎の巻パート I 例 1.2(iii),(iv),(v) はこの定理の応用例である。

定理 1.2 (X, d), (Y, e) を距離空間とし、$f : X \to Y$ を写像とする。次の 3 つの条件は同値。

(1)　f は連続

(2)　$\forall O \subset Y$: 開集合に対し、$f^{-1}(O)$ は開集合

(3) $\forall C \subset Y$: 閉集合に対し、$f^{-1}(C)$ は閉集合

(証明)

(1) ⇒ (2) $O \subset Y$ を開集合とし、$f^{-1}(O)$ が開集合となることを示す。$a \in f^{-1}(O)$ に対し、$f(a) \in O$。O は開集合なので、$\exists \varepsilon > 0$ such that

$$(*) \qquad \{y \in Y \mid e(y, f(a)) < \varepsilon\} \subset O$$

他方、f は連続なので上記 ε に対し、$\exists \delta > 0$ such that

$$(**) \qquad d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

（∗）、（∗∗）より

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow f(x) \in O \Leftrightarrow x \in f^{-1}(O)$$

すなわち、$\forall a \in f^{-1}(O)$, $\exists \delta > 0$ such that

$$\{x \in X \mid d(x, a) < \delta\} \subset f^{-1}(O)$$

となるので、$f^{-1}(O)$ は開集合。 $\square$

(2) ⇒ (1) $\forall a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ に対し、

$$f(a) \in \{y \in Y \mid e(y, f(a)) < \varepsilon\}$$

よって

$$a \in f^{-1}(\{y \in Y \mid e(y, f(a)) < \varepsilon\})$$

他方、集合

$$\{y \in Y \mid e(y, f(a)) < \varepsilon\}$$

は Y の開集合（問 1.1（１））なので、仮定より

$$f^{-1}(\{y \in Y \mid e(y, f(a)) < \varepsilon\})$$

は X の開集合。よって $\exists \delta > 0$ such that

$$\begin{aligned} d(x, a) < \delta \quad &\Rightarrow \quad x \in f^{-1}(\{y \in Y \mid e(y, f(a)) < \varepsilon\}) \\ &\Leftrightarrow \quad e(f(x), f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

よって f は連続である。 $\square$

(2) $\Leftrightarrow$ **(3)** は演習問題（ド・モルガンの法則を使う）。

一般に、写像 $f: X \to Y$ に対し、

$$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) \quad (B_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda) \text{ は } Y \text{ の部分集合})$$

は成り立つけれども、

$$f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \quad (A_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda) \text{ は } X \text{ の部分集合})$$

は**必ずしも成立しなかった**。写像の連続性と同値な条件に対しても似たようなことが言えて、逆像ではなく像を考えると定理 1.2（１）と同値な条件は得られない（問 1.1（６）、（７））。標語としてまとめると

写像に対しては、像を考えるより逆像を考えた方がスッキリしている

問 1.1 (1) 距離空間 (X, d) 内の任意の点 $a \in X$ と任意の正の実数 ε に対し、集合

$$\{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

は (X, d) の開集合であることを示しなさい。

(2) 符号空間 Σ_N の部分集合

$$S = \{0\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \dots \mid \sigma_i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}\}$$

に対し、$(S,$ 符号空間距離$)$ は完備距離空間だろうか？

(3) $\mathbf{R}$ の部分集合

$$C_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}\}$$

に対し、

$$(\mathbf{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \text{ ユークリッド距離})$$

は完備距離空間だろうか？

(4) 定理 1. 2 の (2) $\Leftrightarrow$ (3) を示しなさい。

(5) 2 行 2 列の行列全体の集合

$$M(2,\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbf{R} \right\}$$

に対し、距離

$$d : M(2,\mathbf{R}) \times M(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

を

$$d\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (a_i - b_i)^2}$$

で定める。距離空間 $(M(2,\mathbf{R}), d)$ において、

$$GL(2,\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbf{R}) \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

は開集合だろうか？あるいは閉集合だろうか？あるいはどちらでもないのだろうか？

(6) 連続写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で、開集合 $O \subset \mathbf{R}$ に対し、$f(O)$ が必ずしも開集合にならない例を作りなさい。

(7) 連続写像 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で、閉集合 $C \subset \mathbf{R}$ に対し、$g(C)$ が必ずしも閉集合にならない例を作りなさい。

2 ユークリッド空間のコンパクト集合

定義 2.1 n 次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n,$ ユークリッド距離$)$ において、$\mathbf{R}^n$ の部分集合 S が**有界**とは、S が次の性質を満たすことを表す。

$$\exists R \in \mathbf{R} \ \text{ such that } \quad S \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{0}, x) < R\}$$

ユークリッド平面 $(\mathbf{R}^2,$ ユークリッド距離$)$ 上でこの定義を考えると、集合

$$\{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(\mathbf{0}, x) < R\}$$

は原点 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$ を中心とする半径 R の中身のつまった縁のない円盤となる。この円盤の中に $\mathbf{R}^2$ の部分集合 S がスッポリ入っているということを

$$S \subset \{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(\mathbf{0}, x) < R\}$$

は表している。要するに無限遠方に広がっている部分はないということを表しており、集合 S が開いているとか閉じているとかいうことについては何も言っていない。

定義 2.2 n 次元ユークリッド空間 ($\mathbf{R}^n$, ユークリッド距離) において、$\mathbf{R}^n$ の部分集合 S が**コンパクト**とは、S が有界であり、かつ、閉集合でもあることである。

この定義は幾何学的にはわかりやすいが使いにくい面もあるので、次のような言い換えが役にたつこともある。

定理 2.1 n 次元ユークリッド空間 ($\mathbf{R}^n$, ユークリッド距離) において $\mathbf{R}^n$ の部分集合 S を考える。次の 2 条件は同値。

(1) S はコンパクト

(2) $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S, \exists\{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列) such that $\{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は S の中に収束する

(証明)

(1) ⇒ (2) 略証を与える。S は有界なので、S を含む n 次元球体 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{0}, x) < R\}$ が存在する。さらに、この n 次元球体を含む閉直方体 $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ も存在する。S の中の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、この閉直方体 $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ の中の点列とも考えられる。**実数の連続性をつきつめてよーく考える**と、$[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ の中の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ の中の点 x_0 に収束する収束部分列 $\{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ をもつことがわかる。一方、S は閉集合でもあるので、S の中の点列 $\{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 x_0 は、実は、S に含まれていなければならないことがわかる。 □

(2) ⇒ (1) 対偶を示す。S が有界でないとすると、

$$\forall n, \exists x_n \in S \text{ such that } d(\mathbf{0}, x_n) \geq n$$

が成立する。点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどんな部分列も決して収束しないので（２）を満たさないことがわかる。

また、S が閉集合でないとすると、

$$\exists x \in \mathbf{R}^n - S \text{ such that } \forall\varepsilon > 0,\ \{y \in \mathbf{R}^n \mid d(x, y) \leq \varepsilon\} \cap S \neq \phi$$

が成立する。従って、この点 $x \in \mathbf{R}^n - S$ に対しては

$$\exists x_n \in \{y \in \mathbf{R}^n \mid d(x,y) \leq \frac{1}{n}\} \cap S \quad \text{for } \forall n \in \mathbf{N}$$

この点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$$

であるが、$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \quad$ for $\forall n \in \mathbf{N}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin S$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどんな部分列も必ず $x \notin S$ に収束するので、（２）を満たさないことがわかる。 $\square$

ところで、４ページの問１．１（６）に比べ問１．１（７）は少々難しかったのではなかろうか？実は、それには理由がある。問１．１（７）の閉集合 C を有界な閉集合（＝コンパクト集合）で作ろうとしても作れないんである。実際次が成立。

定理 2.2 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ を２つのユークリッド空間 ($\mathbf{R}^n$, ユークリッド距離), ($\mathbf{R}^p$, ユークリッド距離) の間の連続写像とする。次が成立する。

$$C : \mathbf{R}^n \text{ のコンパクト集合} \Rightarrow f(C) : \mathbf{R}^p \text{ のコンパクト集合}$$

(証明) $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $f(C)$ の中の点列とする。各 y_n に対して、$y_n \in f(C)$ なので

$$\exists x_n \in C \text{ such that } y_n = f(x_n)$$

C はコンパクトなので、定理２．１より、

$$\exists \{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty} \ (\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の部分列}) \ \text{ such that } \{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } C \text{ の中に収束する}$$

点列 $\{x_{i(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を x_0 とおく。f の連続性より、$f(x_{i(n)}) = y_{i(n)}$ も $f(x_0) \in f(C)$ に収束する。従って、$f(C)$ はコンパクトである。 $\square$

我々の学ばんとする**フラクタル圧縮**においては、

> **ユークリッド平面上の図形**
> **＝ ユークリッド平面上のコンパクト集合**

という立場をとる。今後はユークリッド平面上のコンパクト集合が考察の対象である。しかし、これらを個別に見るよりひとまとめにして考えたほうがスッキリするので

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{ユークリッド平面上の空でない}\\ \text{コンパクト集合全体の集合}\end{array}}$$

というものを考える。それが次の定義の $\mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$ である。

定義 2.3

$$\mathcal{H}(\mathbf{R}^2) = \{S \subset \mathbf{R}^n \mid S \text{ は } (\mathbf{R}^n, \text{ユークリッド距離}) \text{ のコンパクト集合。} S \neq \phi\}$$

$\mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$ が**応用解析学 II の主たる舞台**である。

問 2.1 (1) 次の集合は $(\mathbf{R}^2,$ ユークリッド距離$)$ のコンパクト集合かどうかを判定せよ。

(1-a) $A_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ としたときの

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(1-b) $B = A \cup \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ （A は（１－ａ）の A）

(1-c) $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, ($a$ は正の実定数)

(1-d) $D = C - \{(0, 0)\}$ （C は（１－ｃ）の C）

(1-e) $E = \{(x, y) \mid -1 \leq x + y \leq 1\}$

(1-f) $F = \{(x, y) \mid -1 \leq x - y \leq 1\} \cap E$ （E は（１－ｅ）の E）