距離空間の位相的性質
虎の巻
パートI

西 村 尚 史

1　収束列とコーシー列

定義 1.1 距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $x \in X$ に**収束する**とは、次を満たすことである。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ such that } d(x_n, x) < \varepsilon \text{ for } \forall n \geq N(\varepsilon)$$

このとき、$x \in X$ を点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**と呼び、又、$\lim_{n \to \infty} x_n = x$ と書く。

定義 1.2 距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**とは、次を満たすことである。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ such that } d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ for } \forall n, m \geq N(\varepsilon)$$

定理 1.1 距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある点 $x \in X$ に収束すれば、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である。

(証明)　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束するので、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbf{N} \text{ such that } d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } \forall n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$$

$N(\frac{\varepsilon}{2})$ 以上の任意の自然数 m, n に対し、

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x_m, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

が成立しているので、距離空間の条件 (i) と (iv) （テキスト 56 ページ）より

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

この定理の逆はいつでも成立するとは限らない。すなわち、距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列だからといって、ある点 $x \in X$ に収束するとは限らないのである。

例 1.1 $\mathbf{Q}$ のメトリック d を

$$d(x, y) = |x - y| \qquad \text{for } \forall x, y \in \mathbf{Q}$$

で定める（要するに有理数の距離をユークリッド距離で定める）。距離空間 $(\mathbf{Q}, d)$ 内の点列には、コーシー列ではあるが、$\mathbf{Q}$ 内のどの点にも収束しない点列がいっぱいある。

定理1．1の逆が成立するような距離空間が、3．9節**縮小写像定理**との関連から特に重要で、特別な名前がつけられている。

定義 1.3 距離空間 (X, d) 内において

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ コーシー列 }, \exists x \in X \ \text{ such that } \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

が成立するとき（すなわち、定理1．1の逆が成立するとき）、(X, d) は**完備距離空間**と呼ばれる。

例 1.2 **(i)** $(\mathbf{R},$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間。

(ii) $(\mathbf{R}^2,$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間。

(iii) $([0, 1],$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間。

(iv) $([0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2,$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間。

(v) $(\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\},$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間。

(vi) $(\Sigma_N,$ 符号空間距離$)$ は完備距離空間。

(vii) $((0, 1),$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間でない。

(viii) $(\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\},$ ユークリッド距離$)$ は完備距離空間でない。

例 1．2(i) は、実数の連続性と同値であり、証明するには少々時間とスペースが必要。皆さんは 1 年生のときに学んでいるはずなのでここでは成り立つものと認めて話を進める。例 1.2(iii),(iv),(v) は**虎の巻パート II** で納得できるようになるはずである。残りのうち (vi) のみ示す。(ii), (vii), (viii) は演習問題。

(vi) **の証明**　$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ を符号空間 Σ_N のコーシー列とする。

$$\sigma_n = \sigma(1)_n\sigma(2)_n\sigma(3)_n\ldots, \qquad \sigma(i)_n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

とおくと、$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ such that

$$d(\sigma_n,\sigma_m) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\sigma(i)_n - \sigma(i)_m|}{(N+1)^i} < \varepsilon \qquad \text{for } \forall n,m \geq M(\varepsilon)$$

となっている。特に、$\varepsilon = \frac{1}{(N+1)^j}$ に対しても $\exists M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ such that

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\sigma(i)_n - \sigma(i)_m|}{(N+1)^i} < \frac{1}{(N+1)^j} \qquad \text{for } \forall n,m \geq M(\varepsilon)$$

となっている。

$$|\sigma(i)_n - \sigma(i)_m| \in \{0,1,2,,\ldots,N-1\}$$

であるから、（＊）は

$$|\sigma(i)_n - \sigma(i)_m| = 0 \qquad \text{for } 1 \leq \forall i \leq j,\ \forall n,m \geq M(\varepsilon)$$

を意味する。すなわち、

$$(**) \qquad \sigma(i)_n = \sigma(i)_m \qquad \text{for } 1 \leq \forall i \leq j,\ \forall n,m \geq M(\varepsilon)$$

となっており、始めの j 項が一致していることがわかる。このことが任意の自然数 j に対して成り立っているのである。

そこで、$\forall j \in \mathbf{N}$ に対し、

$$\sigma(j) = \sigma(j)_{M(\varepsilon)}$$

と定める。但し、$\varepsilon = \frac{1}{(N+1)^j}$ であり、$M(\varepsilon)$ は上で定めた $M(\varepsilon)$ である。また、

$$\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots$$

と定める。すると、$\forall\varepsilon(= \frac{1}{(N+1)^j}$ の形) $> 0,\ \exists M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ such that

$$\begin{aligned} d(\sigma_m,\sigma) &\leq \sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{N-1}{(N+1)^{j+1}} \\ &= \frac{N-1}{N}\frac{1}{(N+1)^j} \\ &< \frac{1}{(N+1)^j} = \varepsilon \qquad \text{for } \forall n \geq M(\varepsilon) \end{aligned}$$

となるので、$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である。 $\square$

問 1.1 (1) 例 1. 2(i) を仮定し、例 1. 2(ii) を示しなさい。

(2) 例 1. 2(viii) を示しなさい。

(3) 例 1. 2(ix) を示しなさい。

2 連続な写像

定義 2.1 (X,d), (Y,e) をそれぞれ距離空間とする。写像 $f:X\to Y$ が**連続**とは次の性質を満たすときにいう。

(a) $\forall x\in X$ と $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ such that $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ に対し、必ず

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

が成立する。

この定義は連続という言葉の感じをよく表しているが、多少使いづらいところがあるので、次のように言い換える。

定義 2.2 (X,d), (Y,e) をそれぞれ距離空間とする。写像 $f:X\to Y$ が**連続**とは次の性質を満たすときにいう。

(b) $\forall\varepsilon>0$ と $\forall x\in X$ に対し、$\exists\delta>0$ such that

$$d(x,y)<\delta \Rightarrow e(f(x),f(y))<\varepsilon$$

が成立する。

ふたつの連続の定義が相矛盾していないことを保証しておかないといけない。

定理 2.1

定義 2. 1 の（a） $\Leftrightarrow$ 定義 2. 2 の（b）

(証明)

(a) ⇒ (b) 背理法で示す。（b）が成立しないとすると次のようになる。
$\exists x\in X,\ \exists\varepsilon>0$ such that $\forall n\in\mathbf{N},\ \exists x_n\in X$ such that

$$d(x,x_n)<\frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad e(f(x),f(x_n))>\varepsilon$$

点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ は、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$$

を満たしているので仮定（a）に矛盾する。よって（b）は成立する。 $\Box$

(b) ⇒ (a)　（b）が成立しているので

$\forall \varepsilon > 0$ と $\forall x \in X$ に対し、$\exists \delta > 0$ such that

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ なのでこの δ に対し、

$$\exists N \in \mathbf{N} \text{ such that } n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \delta$$

（1）より

$$e(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$$

結局、

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}$ such that

$$n \geq N \Rightarrow e(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$$

なので $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$。 $\Box$

こうして２つの定義は同値な定義だということがわかった。以後はどちらを連続の定義として使ってもよい。

例 2.1 (i)　($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) 上のアフィン変換 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続。

(ii)　($\mathbf{R}^2$, ユークリッド距離) 上のアフィン変換 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は連続。

(iii)　($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) 上の微分可能な関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続。

(iv)　(Σ_N, 符号空間距離) 上の以下で定められる変換（遷移変換と呼ばれる）$S : \Sigma_N \to \Sigma_N$ は連続。

$$S(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots) = x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots$$

(証明)

(ii)

$$w\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

とおく。すると、

$$
\begin{aligned}
& d(w(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), w(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})) \\
= \quad & d(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}) \\
= \quad & \sqrt{[a(x_1 - y_1) + b(x_2 - y_2)]^2 + [c(x_1 - y_1) + d(x_2 - y_2)]^2} \\
\leq \quad & \sqrt{[(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2]\ \max(|x_1 - y_1|^2, |x_2 - y_2|^2)} \\
= \quad & \sqrt{(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2}\ \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \\
\leq \quad & \sqrt{(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2}\ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
= \quad & \sqrt{(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2}\, d(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})
\end{aligned}
$$

なので、$\forall \varepsilon > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ に対し、

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2} + 1}\varepsilon$$

とおくと、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(w(\mathbf{x}), w(\mathbf{y})) < \frac{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2}}{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + (|c| + |d|)^2} + 1}\varepsilon < \varepsilon \qquad \square$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
& f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ が微分可能} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall a \in \mathbf{R}, \exists \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall a \in \mathbf{R}, \exists f'(a) \in \mathbf{R} \text{ such that } \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 \text{ such that} \\
& \qquad |x - a| < \gamma,\ (x \neq a) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| < \varepsilon |x - a| \\
\Rightarrow \quad & |f(x) - f(a)| < (|f'(a)| + \varepsilon)|x - a|
\end{aligned}
$$

以上をじっと睨んで、$\forall a \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0$ に対し、$\delta = \min(\frac{\varepsilon}{|f'(a)|+\varepsilon},\ \gamma)$ とおくと

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta,\ (x \neq a) \quad \Rightarrow \quad & |f(x)-f(a)| < (|f'(a)|+\varepsilon)|x-a| \\ < \quad & (|f'(a)|+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{|f'(a)|+\varepsilon} \\ = \quad & \varepsilon \qquad \square \end{aligned}$$

写像の連続性をきっちりと定義しておくと次のようなことも示すことができる。

定理 2.2 $\mathcal{C} = \{f : [0,1] \to \mathbf{R}$ 連続 $\}$ とおき、$f, g \in \mathcal{C}$ に対して、

$$d(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)|\ |x \in [0,1]\}$$

とおく。すると $(\mathcal{C}, d)$ は完備距離空間となる。

（証明） $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{C}$ のコーシー列とする。すなわち、$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\frac{\varepsilon}{3}) \in \mathbf{N}$ such that

(1) $$\max\{|f_n(x)-f_m(x) \mid x \in [0,1]\} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for } \forall n, m \geq N(\frac{\varepsilon}{3})$$

が成立している。$x \in \mathbf{R}$ を固定するごとに、$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbf{R}$ のコーシー列となる。$\mathbf{R}$ は完備なので $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列。

(2) $$f(x) = \lim f_n(x)$$

とおくと、関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ を得る。この関数 f が連続であることを示せば証明が終わる。

（１）と（２）より、$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\frac{\varepsilon}{3}) \in \mathbf{N}$ such that

(3) $$|f(x) - f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for } \forall x \in [0,1]$$

が成り立っており、また、$f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}$ は連続なので、$\forall x \in [0,1]\ \exists \delta > 0$ such that

(4) $$|x-y| < \delta \Rightarrow |f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(x) - f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

も成り立っている。（３）、（４）より
$\exists N(\frac{\varepsilon}{3}) \in \mathbf{N},\ \exists \delta > 0$ such that $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & |f(x)-f(y)| \\ = \quad & |f(x) - f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(x) + f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(x) - f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(y) + f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(y) - f(y)| \\ \leq \quad & |f(x) - f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(x)| + |f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(x) - f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(y)| + |f_{N(\frac{\varepsilon}{3})}(y) - f(y)| \\ < \quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

よって、$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0,1],\ \exists \delta > 0$ such that

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

を得る。すなわち f は連続である。 □

問 2.1 (1) 例 2. 1(i) を示しなさい。

(2) 例 2. 1(iv) を示しなさい。

(3) $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ \pi(x,y) = x$ は連続な写像だろうか？

(4) $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$、$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ がともに連続なとき、$g \circ f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ も連続な写像になることを示しなさい。

3 開集合と閉集合

１次元ユークリッド空間 ($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) における開区間 $(0,1)$ は以下の性質を持っている。

$\forall x \in (0,1)$ に対し、$\exists \varepsilon > 0$ such that

$$\{y \in \mathbf{R} | d(x,y) \leq \varepsilon\} \subset (0,1)$$

この性質を一般化して、距離空間における**開いた**集合を定義する。

定義 3.1 距離空間 (X,d) の部分集合 S が**開集合**とは、S が次を満たすことである。

$\forall x \in S$ に対し、$\exists \varepsilon > 0$ such that

$$\{y \in X | d(x,y) \leq \varepsilon\} \subset S$$

定義 3.2 距離空間 (X,d) の部分集合 S が**閉集合**とは、$X - S$ が開集合であることである。

閉集合の言い換えとして、次の性質がある。

定理 3.1 距離空間 (X,d) の部分集合 S が閉集合であることと、次の性質（∗）を満たすこととは同値である。

（∗） $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ に対し、

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \in S$$

（証明）

（閉集合）$\Rightarrow$（$\ast$）　　対偶を示す。

$$
\begin{aligned}
& （\ast）の否定 \\
\Leftrightarrow\ & \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S \text{ such that } \exists \lim_{n\to\infty} x_n \ (= x) \in X - S \\
\Rightarrow\ & 点\ x\ において、\ X - S\ が開集合の条件を満たしていない
\end{aligned}
$$

□

（$\ast$）$\Rightarrow$（閉集合）　　対偶を示す。

$$
\begin{aligned}
& S\ が閉集合でない \\
\Leftrightarrow\ & X - S\ が開集合でない \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \in X - S \text{ such that } \forall \varepsilon > 0,\ \{y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\} \cap S \neq \phi
\end{aligned}
$$

従って、この点 $x \in X - S$ に対しては

$$\exists x_n \in \{y \in X \mid d(x,y) \leq \frac{1}{n}\} \cap S \quad \text{for } \forall n \in \mathbf{N}$$

この点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$$

であるが、$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$　 for $\forall n \in \mathbf{N}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \not\in S$$

よって（$\ast$）を満たさない。　　□

虎の巻パート II で扱う**コンパクト集合**は閉集合なので、この授業では 開集合よりも**閉集合**を重視する。しかし、閉集合は開集合を使って定義しているし、閉集合より開集合のほうが扱いやすいので開集合も同時に扱っておく。開集合や閉集合の基本的な性質として次がある。

定理 3.2 距離空間 (X, d) において以下が成立。

(1)　　$A_\lambda,\ (\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば、$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も開集合。

(2)　　$A_1, A_2, \ldots, A_n$ が開集合ならば、$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ も開集合。

(3) A_λ, $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も閉集合。

(4) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が閉集合ならば、$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ も閉集合。

(証明) （２）のみ示す。残りは演習問題。

$a \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ とすると、$a \in A_i \quad \text{for } \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$。$A_i$ は開集合なので、

$$\exists \delta(i) > 0 \text{ such that } \{y \in X \mid d(y, a) \leq \delta(i)\} \subset A_i$$

そこで、$\delta = \min\{\delta(1), \delta(2), \ldots, \delta(n)\}$ とおくと、

$$\{y \in X \mid d(y, a) \leq \delta\} \subset \{y \in X \mid d(y, a) \leq \delta(i)\} \subset A_i \quad \text{for } \forall i$$

従って、

$$\{y \in X \mid d(y, a) \leq \delta\} \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \qquad \square$$

例 3.1 (i) ($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) において、部分集合 $(0, 1) \cup (2, 3)$ は開集合。

(ii) ($\mathbf{R}^2$, ユークリッド距離) において部分集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ は開集合。

(iii) ($\mathbf{R}^2$, ユークリッド距離) において部分集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ は開集合。

(iv) ($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) において、部分集合 $\{0\}$ は閉集合。

(v) ($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) において、部分集合 $[0, 1]$ は閉集合。

(vi) ($\mathbf{R}$, ユークリッド距離) において、カントール集合 $\mathcal{C}$ は閉集合。

(vii) ($\mathbf{R}^2$, ユークリッド距離) において部分集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ は閉集合。

(viii) 距離空間 (X, d) において、部分集合 X と $\{\ \ \}$ はどちらも開集合でもあるし、閉集合でもある。

(ix) 集合 $S = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ は、($(0, 1]$, ユークリッド距離) では閉集合であるが、($[0, 1]$, ユークリッド距離) では閉集合でない。もちろん開集合でもない。

上の例でもわかるように、開集合でも閉集合でもどちらでもない部分集合は沢山あるし、開集合でも閉集合でもどちらでもある部分集合もありえる。

問 3.1 (1) 定理 3. 2(1) を示しなさい。

(2) 定理 3. 2(3) を示しなさい。

(3) 定理 3. 2(4) を示しなさい。

(4) 例 3. 1(iii) を示しなさい。

(5) 例 3. 1(vi) を示しなさい。

(6) 例 3. 1(vii) を示しなさい。

(7) 例 3. 1(viii) を示しなさい。

(8) 例 3. 1(ix) を示しなさい。

(9) $(\mathbf{R},$ ユークリッド距離$)$ において、$\mathbf{Z}$ は開集合だろうか？あるいは閉集合だろうか？

(10) $(\mathbf{R},$ ユークリッド距離$)$ において、$\mathbf{Q}$ は開集合だろうか？あるいは閉集合だろうか？