数理科学演習II試験問題

１９９８年1月２７日

問題１．　次の２つに答えなさい。

(1) $A_n, \quad (n=1,2,\ldots)$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合のとき、$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合になるだろうか？なると思う人は証明し、ならないと思う人は反例をあげなさい。

(2) $A_n, \quad (n=1,2,\ldots)$ が $\mathbf{R}^n$ の閉集合のとき、$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathbf{R}^n$ の閉集合になるだろうか？なると思う人は証明し、ならないと思う人は反例をあげなさい。

問題２．　連続写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ に対し、次の２つに答えなさい。

(1) 「$\mathbf{R}^n$ の任意の開集合 U の f による像 $f(U)$ は、必ず、開集合である 」は正しいか？正しければ証明し、正しくなければ反例をあげなさい。

(2) 「$\mathbf{R}^m$ の任意の開集合 V の f による逆像 $f^{-1}(V)$ は、必ず、開集合である 」は正しいか？正しければ証明し、正しくなければ反例をあげなさい。

問題３．次の集合 A の閉包 $\overline{A}$、内点 $Int(A)$、境界 $b(A)$ を求めなさい。

(1)
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a < x < b, c \le y \le d\}, \quad a < b,\ c < d$$

(2)
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} - \{(0,0)\}$$

(3)
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, \frac{1}{n}) | 0 \le x \le 1\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

(4)
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}\}$$