数理科学演習Ｉ試験解答例

１９９５年１０月３日

問題１.（1）

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0\le x\le 1\} \\
Int(A) &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0< x< 1,\ y\neq 0\} \\
b(A) &= \overline{A} - Int(A) \\
&= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x(x-1)=0\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0\le x\le 1, y=0\}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\
Int(A) &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0< x< 1,\ 0< y< 1\} \\
b(A) &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x(x-1)=0,\ 0\le y\le 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0\le x\le 1,\ y(y-1)=0\}
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \mathbf{R}^2 \\
Int(A) &= \phi \\
b(A) &= \overline{A}
\end{aligned}
$$

問題２.　（１）

$$
\begin{aligned}
& \text{集合 } A\subset\mathbf{R}^n \text{ が閉集合} \\
\Leftrightarrow\ & \text{集合 } \mathbf{R}^n - A \text{ が開集合} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x\in\mathbf{R}^n - A, \exists\varepsilon>0 \text{ such that } B_\varepsilon(x)\subset\mathbf{R}^n - A
\end{aligned}
$$

(2)

$$\begin{array}{cl} & \text{集合 } A \subset \mathbf{R}^n \text{ が } \mathbf{R}^n \text{ の中で稠密} \\ \Leftrightarrow & \overline{A} \cap \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \end{array}$$

(3) 存在する。$\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の中で稠密であり、閉集合でもあるから。

問題３．　写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が点 $a \in \mathbf{R}$ で微分可能なので、

$$\exists b (= f'(a)) \in \mathbf{R} \text{ such that } \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 \text{ such that}$$

$$|x-a| < \gamma,\ (x \neq a) \Rightarrow |\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - b| < \varepsilon.$$

が成立する。三角不等式を使うと、$x \neq a$ のもとでは、

$$\begin{array}{cl} & |\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - b| < \varepsilon. \\ \Leftrightarrow & |f(x)-f(a)| < (|b|+\varepsilon)|x-a| \end{array}$$

となることが解るので、$\delta = \min(\gamma, \frac{\varepsilon}{|b|+\varepsilon})$ とおくと

$$\begin{array}{rcl} |x-a| < \delta,\ (x \neq a) \Rightarrow |f(x)-f(a)| & < & (|b|+\varepsilon)|x-a| \\ & < & (|b|+\varepsilon)\delta \\ & < & (|b|+\varepsilon)\dfrac{\varepsilon}{|b|+\varepsilon} = \varepsilon. \end{array}$$

他方、$x = a$ ならば　$|f(x)-f(a)| = 0 < \varepsilon$。よって、

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

従って、f は点 $a \in \mathbf{R}$ で連続である。