数理科学演習レポート問題

１９９４年１２月２０日

以下の７問のうち、３問以上に対し答えなさい。

問題１．　$A_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合のとき、$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合になるだろうか？

問題２．$A, B \subset \mathbf{R^n}$ に対し、

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

を示せ。又、$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ となる例を挙げよ。但し、$\overline{A}$ は A の閉包を表す。

問題３．次の集合 A の閉包 $\overline{A}$、内点 $Int(A)$、境界 $b(A)$ を求めなさい。

(1) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a < x < b, c \leq y \leq d\}, \quad a < b,\ c < d$

(2) $$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} - \{(0, 0)\}$$

(3) $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, \frac{1}{n}) | 0 \leq x \leq 1\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

(4) $$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}\}$$

問題４．次の２つを示しなさい。

(1)　$\mathbf{R}$ と $\mathbf{Z}$ は濃度が等しくない。

(2)　$\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Q}^+ = \{q \in \mathbf{Q} | q > 0\}$ は濃度が等しい。

問題５．２行２列の行列全体の集合

$$M(2,\mathbf{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$$

の中で部分集合

$$SL(2,\mathbf{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbf{R}) | \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1\}$$

を考える。以下に対し答えなさい。

(1)　$SL(2,\mathbf{R})$ は $M(2,\mathbf{R})$ の閉集合であることを示しなさい。

(2)　$SL(2,\mathbf{R})$ は点列コンパクトであろうか？

問題６．$A, B \subset \mathbf{R}$ を閉集合とする。

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

とおくと $A + B$ も閉集合になるだろうか？

問題７．$A, B \subset \mathbf{R}$ を閉区間とし、連続写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が条件 $f(A) \supset B$ を満たしているとする。そのとき、$f(C) = B$ となる閉区間 C が A の中に存在することを示しなさい。