解答例*

１９９５年1月１０日

問題１． 一般には、ならない。例えば、$A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ とおくと $A_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ は $\mathbf{R}$ の開集合。しかし

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

となり、これは $\mathbf{R}$ の開集合でない。

問題２． まず、$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ を示す。
$A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B$ であるから

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A},\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B},$$

よって $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$。
次に、$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ となる例を示す。

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{Q},\ y \in \mathbf{Q}\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q},\ y \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}\} \end{aligned}$$

とおくと, $\overline{A} = \mathbf{R}^2$ となり、同様に $\overline{B} = \mathbf{R}^2$ となる。従って $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbf{R}^2$ となる。

*あくまで解答例にすぎません。授業中に丁寧に扱った所は色々省略して書いてあります。皆さんは、できうる限り詳しく丁寧に書くように心がけて下さい。ビギナーなのですから。

他方、$A\cap B=\phi$ なので $\overline{A\cap B}=\phi$ となることがわかる。
以上より、$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

問題3.(1)

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2|a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}\\ Int(A) &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2|a< x< b,\ c< y< d\}\\ b(A) &= (\bigcup_{x\in\{a,b\}}\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|c\leq y\leq d\})\cup(\bigcup_{y\in\{c,d\}}\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|a\leq x\leq b\})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}\\ Int(A) &= A\\ b(A) &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overline{A} &= A\cup\{(x,0)\in\mathbf{R}^2|0\leq x\leq 1\}\\ Int(A) &= \phi\\ b(A) &= \overline{A}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \mathbf{R}^2\\ Int(A) &= \phi\\ b(A) &= \overline{A}\end{aligned}$$

問題4.（1）関数 $f(x)=\tan x$ は、開区間 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ から $\mathbf{R}$ への全単射写像。また、関数 $f(x)=\pi x-\frac{\pi}{2}$ は、開区間 $(0,1)$ から開区間 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ への全単射写像。従って、開区間 $(0,1)$ と $\mathbf{R}$ の濃度は等しい。
他方、$(0,1)$ と $\mathbf{N}$ の濃度は等しくないことを既に示してある。以上より、$\mathbf{R}$ と $\mathbf{N}$ の濃度は等しくない。
(2) $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{N}$ の濃度が等しいことを（1）で示した。$\mathbf{N}$ と $\mathbf{Q}^+$ の濃度が等しいことが既に示してある。従って、$\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Q}^+$ の濃度は等しい。

問題５．（１）写像

$$f: M(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

を

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

で定めると f は a,b,c,d ４変数の多項式関数なので連続関数である。
$SL(2,\mathbf{R}) = f^{-1}(\{1\})$ であり、$\{1\}$ は $\mathbf{R}$ の閉集合なので $SL(2,\mathbf{R})$ は $M(2,\mathbf{R})$ の閉集合。

(2) $SL(2,\mathbf{R})$ は点列コンパクトではない。そのことを見るには、$SL(2,\mathbf{R})$ が有界でないことを見れば十分である。
$M(2,\mathbf{R})(=\mathbf{R}^4)$ の部分集合

$$\{\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} | n \in \mathbf{N}\}$$

は

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+0^2+0^2+(\frac{1}{n})^2) = \infty$$

なので、有界集合でない。

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R}) \qquad (\text{for } \forall n \in \mathbf{N})$$

なので $SL(2,\mathbf{R})$ も有界集合でない。

問題６．以下の例に見るように一般には閉集合にならない。

$$A = \mathbf{N}, \quad B = \{-n + \frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\}$$

とおくと、A, B ともに $\mathbf{R}$ の閉集合。

$$\frac{1}{n} = n + (-n + \frac{1}{n}) \in A + B \qquad (\text{for } \forall n \in \mathbf{N})$$

であり、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、

$$0 \in \overline{A+B}$$

しかし、$0 \notin A+B$ なので $A+B \neq \overline{A+B}$ であることがわかる。従って、$A+B$ は閉集合でない。

しかしながら、A, B の少なくとも一方が有界であれば $A+B$ は閉集合となることが、以下の観察からわかる。

A を有界と仮定して $\overline{A+B} \subset A+B$ を示す。$\forall x \in \overline{A+B}$ に対し、閉包の定義より

$$\exists a_n \in A, \exists b_n \in B; \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=x$$

A は有界閉集合なので点列コンパクト。従って、A の点列 $\{a_n\}$ は A のある点に収束する部分列 $\{a_{n(i)}\}$ を持つ。$\mathbf{R}$ の点列 $\{a_n+b_n\}$ は x に収束するのだからその部分列 $\{a_{n(i)}+b_{n(i)}\}$ も x に収束する。従って $\{b_{n(i)}\}$ も $(b_{n(i)} = (a_{n(i)}+b_{n(i)}) - a_{n(i)}$ であるから) $\mathbf{R}$ のどこかに収束する。 B は閉集合であるから $b_{n(i)}$ の収束先は B の点でなくてはいけない。$a_{n(i)}$ は A の点に, $b_{n(i)}$ は B の点に収束するのだから, $a_{n(i)}+b_{n(i)}$ は $A+B$ の点に収束する。

$\mathbf{R}$ のある点に収束する点列 $\{a_n+b_n\}$ の部分列 $\{a_{n(i)}+b_{n(i)}\}$ が $A+B$ のある点に収束することがわかったので、もとの点列 $\{a_n+b_n\}$ も、実は、$A+B$ のある点に収束していたんだということがわかる（収束点列の部分列はもとの点列の収束先に収束する、という事実を使っている)。

以上により、$\overline{A+B}$ から任意に取った点 x は $A+B$ の点である、ということが 示せた。

問題 7. まず、次の補題を示す。

$\boxed{\text{補題.}\quad \mathbf{R} \text{ の連結有界閉集合 } A \text{ は一点かまたは閉区間である}}$

<u>補題の証明</u> A は有界閉集合であるから $\min A,\ \max A$ が存在する。$\min A = \max A$ のときは A は一点のみからなる集合。以下で、$\min A \neq \max A$ と仮定し $A = [\min A,\ \max A]$ となることを示す。

$\forall x \in A$ に対し $\min A \leq x \leq \max A$ なので $A \subset [\min A,\ \max A]$。

他方、

$$\exists x \in [\min A,\ \max A]; x \notin A$$

と仮定すると

$$\begin{aligned}&A \subset (-\infty, x) \cup (x, \infty)\\&(-\infty, x) \cap (x, \infty) = \phi\\&A \cap (-\infty, x) \neq \phi,\ A \cap (x, \infty) \neq \phi\end{aligned}$$

となり、A を分離する開集合 $(-\infty, x)$ (x, ∞) が得られるが、これは閉区間 A が連結であることに矛盾する。よって、$[\min A,\ \max A] \subset A$ となる。

<u>問題７の解答</u>A は閉区間なので連結かつ点列コンパクト。f が連続なので $f(A)$ も連結かつ点列コンパクトとなり、補題より $f(A)$ は一点かまたは閉区間となるが、条件 $f(A) \supset B$ より $f(A)$ は一点にはなりえず、閉区間であることがわかる。$f(A) = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2]$ とおく。

$[a_1, a_2] \supset [b_1, b_2]$ であることを考慮して場合わけを行う。

(CASE 0) $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$

(CASE 1) $a_1 = b_1,\ a_2 > b_2$

(CASE 2) $a_1 < b_1,\ a_2 = b_2$

(CASE 3) $a_1 < b_1,\ a_2 > b_2$

(CASE 0) の場合は証明が終わっており、(CASE 3) の場合は (CASE 1) と (CASE 2) の場合の結果を組み合わせれば簡単に証明できるので、結局、 (CASE 1) と (CASE 2) のふたつの場合に対し証明すれば十分である。さらに、(CASE 1) の場合の証明と (CASE 2) の場合の証明はほとんど同じなので、ここでは (CASE 1) の場合のみ証明する。

$\exists \alpha \in f^{-1}(b_1)$ なのでひとつとってくる。その α に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0,\ f([\alpha - x, \alpha + x] \cap A) \subset B\} \cup \{x \in \mathbf{R} | x < 0\}\\ \mathcal{B} &= \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0,\ f([\alpha - x, \alpha + x] \cap A) \supset B\}\end{aligned}$$

とおくと、$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ともに $\mathbf{R}$ の開集合であり、$\mathcal{A} \neq \phi$。また、(CASE 1) の仮定より $\mathcal{B} \neq \phi$。さらに、

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \phi$$

となることもすぐわかる。今、$f([\alpha - x, \alpha + x] \cap A) = B$ となる $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ が存在しないと仮定すると、(CASE 1) の仮定及び中間値の定理より

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbf{R}$$

となり、$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は $\mathbf{R}$ を分離する開集合となるがこれは $\mathbf{R}$ の連結性に矛盾。よって

$$\exists x \in \mathbf{R}\ ;\ f([\alpha - x, \alpha + x] \cap A) = B$$

となる。$[\alpha - x, \alpha + x] \cap A \subset A$ であり、A が閉区間なので $[\alpha - x, \alpha + x] \cap A$ も閉区間となり、題意は示された。