略解*

平成11年12月11日

問題1．

$$
\begin{aligned}
& A_1, A_2 \text{ が共に点列コンパクト} \\
\Leftrightarrow \quad & A_1, A_2 \text{ が共に有界閉集合} \\
\Leftrightarrow \quad & A_1 \times A_2 \text{ が有界閉集合} \\
\Leftrightarrow \quad & A_1 \times A_2 \text{ が点列コンパクト。}
\end{aligned}
$$

問題2． まず、$\mathbf{R}^n - \overline{A} \subset Int(\mathbf{R}^n - A)$ を示す。

$\overline{A} \supset A$ なので $\mathbf{R}^n - \overline{A} \subset \mathbf{R}^n - A$。また、$\overline{A}$ は閉集合なので $\mathbf{R}^n - \overline{A}$ は開集合。従って、$\forall x \in \mathbf{R}^n - \overline{A}$ に対し

$$\exists \varepsilon > 0; B_\varepsilon(x) \subset \mathbf{R}^n - \overline{A} \subset \mathbf{R}^n - A \text{ 。}$$

よって $x \in Int(\mathbf{R}^n - A)$。

次に、$\mathbf{R}^n - \overline{A} \supset Int(\mathbf{R}^n - A)$ を示す。

$Int(\mathbf{R}^n - A)$ の定義より、$\forall x \in Int(\mathbf{R}^n - A)$ に対し

$$\exists \varepsilon > 0; B_\varepsilon(x) \subset Int(\mathbf{R}^n - A) \subset \mathbf{R}^n - A \text{ 。}$$

この x に対し、$x \in \overline{A}$ と仮定すると $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$ となるので

$$B_\varepsilon(x) \subset \mathbf{R}^n - A \text{ 。}$$

*あくまで解答例にすぎません。

よって　$x \ni \overline{A}$、すなわち、$x \in \mathbf{R}^n - \overline{A}$。

問題３. (1)

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \\
Int(A) &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \\
b(A) &= (\cup_{x \in \{0,1\}} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq y \leq 1\}) \\
&\quad \bigcup (\cup_{y \in \{0,1\}} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\})
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= A \cup \{(x,0) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\} \\
Int(A) &= \phi \\
b(A) &= \overline{A}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \mathbf{R}^2 \\
Int(A) &= \phi \\
b(A) &= \overline{A}
\end{aligned}
$$

問題４.　(1) $\exists f : A \to B$ 全単射。

(2) $\exists f : A \to \mathbf{N}$ 全単射。

(3) $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ であり、「$\mathbf{Q}$　は可算集合」、「２つの可算集合の和集合は可算集合」なので、仮に $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ が可算集合だとすると、$\mathbf{R}$ も可算集合となる。しかし、$\mathbf{R}$ は可算集合ではないので矛盾。よって、$\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ は可算集合でない。

問題５.　まず、g は単射を示す。

仮定より $g \circ f : A \to C$ は全射なので $\forall z \in C$ に対し、$\exists x \in A; z = g \circ f(x) = g(f(x))$。$y = f(x)$ とおけば

$$\forall z \in C \text{ に対し、} \exists y = f(x); z = g(y)$$

となり g は全射。

次に、f は単射を示す。
$f(x_1)=f(x_2)$ とおくと

$$g\circ f(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=g\circ f(x_2)$$

となり、仮定より $g\circ f:A\to C$ は単射なので $x_1=x_2$。よって f は単射。

問題６． 開集合となる。

$$A+B=\bigcup_{a\in A}(\{a\}+B)$$

であり、（$\{a\}+B$ は B を平行移動したものだから）B が開集合ならば $\{a\}+B$ も開集合。また、開集合の和集合は開集合。

問題7. 無理数 α を任意にとり、２つの開集合 $(-\infty,\alpha),\ (\alpha,\infty)$ を考える。

$$\begin{aligned}(-\infty,\alpha)\cup(\alpha,\infty) &\supset \mathbf{Q}\\ (-\infty,\alpha)\cap(\alpha,\infty) &= \phi\end{aligned}$$

なので $(-\infty,\alpha),\ (\alpha,\infty)$ は $\mathbf{Q}$ を分離する開集合となる。よって $\mathbf{Q}$ は連結でない。

問題８. 教科書　29 ページ参照。

問題９. (O1) $X\in\mathcal{O}_1,\ X\in\mathcal{O}_2$ なので $X\in\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$。$\phi\in\mathcal{O}_1,\ \phi\in\mathcal{O}_2$ なので $\phi\in\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$。
(O2) $O_\lambda\in\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2\qquad(\lambda\in\Lambda)$　とする。$\mathcal{O}_1$ は (O3) を満たしているので

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}_1\ 。$$

$\mathcal{O}_2$ は (O3) を満たしているので

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}_2\ 。$$

従って、

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \text{ 。}$$

(O3) $O_1, \cdots, O_n \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ とする。$\mathcal{O}_1$ は (O2) を満たしているので $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}_1$。$\mathcal{O}_2$ は (O2) を満たしているので $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}_2$。従って、

$$O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \text{ 。}$$

問題１０．（１）はい。

$$\begin{aligned}
& A \text{ が } X \text{ の閉集合} \\
\Leftrightarrow\ & (X - A) \text{ が } X \text{ の開集合} \\
\Rightarrow\ & (X - A) \cap Y \text{ が } Y \text{ の開集合} \\
\Leftrightarrow\ & A \cap Y = Y - (X - A) \cap Y \text{ が } Y \text{ の閉集合 。}
\end{aligned}$$

(2) いいえ。$X = \mathbf{R}$, $Y = B = [0, 1)$ とおくと、B は Y の閉集合であるが X の閉集合ではない。