数理科学試験問題

１９９５年1月２４日

以下の１０問のうち、４問以上に対し答えなさい。

問題１．　$A_1,\ A_2$ が $\mathbf{R}^n$ の点列コンパクトな部分集合のとき、$A_1 \times A_2$ は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$ の点列コンパクトな部分集合になるだろうか？

問題２．$A \subset \mathbf{R}^n$ に対し、次を示しなさい。但し、$\overline{A}$ は A の閉包、$Int(\mathbf{R}^n - A)$ は $\mathbf{R}^n - A$ の内点を表す。

$$\mathbf{R}^n - \overline{A} = Int(\mathbf{R}^n - A)$$

問題３．次の集合 A の閉包 $\overline{A}$、内点 $Int(A)$、境界 $b(A)$ を求めなさい。

(1) $$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$$

(2) $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, \frac{x}{n}) | 0 \leq x \leq 1\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

(3) $$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}\}$$

問題４．次の３つに対し答えなさい。
(1)　「２つの集合 $A,\ B$ の濃度が等しい」ということの定義を述べなさい。
(2)　「集合 A が可算集合である」ということの定義を述べなさい。
(3)　「集合 $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ は可算集合でない」ことを示しなさい。

問題５．写像 $f:A\to B,\ \ g:B\to C$ に対し、　$g\circ f:A\to C$ が全単射であるとする。そのとき、g は全射となり f は単射となることを示しなさい。

問題６．$A,B\subset\mathbf{R}$ を開集合とする。

$$A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$$

とおくと $A+B$ も開集合になるだろうか？

問題７．$\mathbf{R}$ の部分集合 $\mathbf{Q}$ は連結でないことを示しなさい。

問題８．$X=\{f|f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 連続 $\}$ とおく。$f,\ g$ に対して、

$$d(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|\quad|\,x\in[0,1]\}$$

とおくと、(X,d) は距離空間になることを示しなさい。

問題９．位相空間 $(X,\mathcal{O}_1),\ (X,\mathcal{O}_2)$ に対し、$(X,\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2)$ も位相空間となることを示しなさい。

問題１０．X を位相空間とし、Y を X の部分位相空間とする。以下に答えなさい。
(1)　$A(\subset X)$ が X の閉集合であれば、$A\cap Y$ は Y の閉集合であろうか？
(2)　$B(\subset Y)$ が Y の開集合であれば、B は X の開集合であろうか?