予想を装う問題集

平成12年12月18日

（これらの問題のうちのいずれかと同じ、または、酷似した問題が期末試験に出題される気がする）

1. 次の複素関数 $f(z)$ に対応する二次の実正方行列を求めよ。
 (a) $f(z) = iz + \bar{z}$
 (b) $f(z) = e^{-i\alpha}z \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
 (c) $f(z) = e^{-i\alpha}z - ie^{i\beta}\bar{z} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

2. 任意の複素数 $\alpha = a + ib; \alpha_1 = a_1 + ib_1; \alpha_2 = a_2 + ib_2$ に対して、次の各問に答えよ。
 (a) 複素関数 $f(z) = \alpha z$ を表現する実の二次正方行列 A は

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

 であることを示せ。
 (b) 複素関数 $w = \alpha_1 z;\ w = \alpha_2 z$ を表現する二次の実正方行列をそれぞれ $A_1; A_2$ とするとき、$w = (\alpha_1 + \alpha_2)z$ を表す行列は $A_1 + A_2$（行列の和）であることを示せ。
 (c) 上の $\alpha_1;\ \alpha_2;\ A_1;\ A_2$ に対し、複素関数 $w = (\alpha_1\alpha_2)z$ を表現する行列は A_1A_2（行列の積） であることを示せ。

3. $\overline{\log z} = \log \bar{z}$ を示せ。

4. 指数関数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

 に対し、次を示せ。
 (a) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$
 (b) $(e^z)' = e^z \quad (z \in \mathbb{C})$

5. 次の等式を示せ。
 (a) $(\cos z)' = -\sin z$
 (b) $(\sin z)' = \cos z$
 (c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
 (d) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
 (e) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
 (f) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

6. 次を示せ。
 (a) e^z は $2\pi i$ を基本周期にする周期関数である。
 (b) $\sin z$ は有界でない。

7. 次の値を求めよ。

(a) $\operatorname{Log} i$

(b) i^i 主値

(c) $\sin(i\pi)$

(d)

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$$

(e)

$$\lim_{-\pi < \arg z < \pi,\ z \to 0} z \operatorname{Log} z$$

8. 次の方程式を解け。

(a) $e^z = 1 - i$

(b) $\sin z = 0$

(c) $\cos z = i$

9. 次の不等式を示せ。

$$|e^z| \le e^{|z|}$$

10. 次の集合を図示せよ。

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |e^{-z}| < 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le \pi,\ |\cos z| \le 1\}$

11. z 平面内の実軸、虚軸に平行な $y = y_0,\ x = x_0$ は、写像 $w = \frac{1}{z}$ によって、円に写ることを示せ。

12. 写像 $w = \log z$ の様子を調べよ。

13. 写像 $w = \frac{1}{z}$ の様子を調べよ。

14. 写像 $w = \sin z$ の様子を調べよ。

15. 複素関数 $f(z) = (\sqrt{3} + i)z$ に対応する行列を求めよ。

16. 行列

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

に対応する複素関数を求めよ。

17. 次の複素関数の複素微分可能性を調べよ。

(a) $f(z) = \bar{z}$

(b) $f(z) = \bar{z}^3$

(c) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$

(d) $f(z) = |z|^2$

18. 以下の複素関数 $f(z)$ に対し、その微分 $f'(z)$ を定義に従って求めよ。

(a) $f(z) = z^2$

(b) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 　(ただし $z = x + iy$)

19. 次の複素関数 $w = f(z) = u(x, y) + 0i$ は、原点 $z = 0$ において、コーシー・リーマン方程式はみたしているが、複素微分可能でないことを示せ。

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{2xy} & (x + iy \neq 0) \\ 0 & (x + iy = 0) \end{cases}$$

20. 問 4 と合成関数の微分の公式を使って、z^α $(\alpha \in \mathbb{C})$ の微分を求めよ。

21. 複素関数

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

の微分を求めよ。

22. 正則関数 $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$　$(z = x + iy)$ に対し次の等式を示せ。

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial u}{\partial x}(x;y)\frac{\partial v}{\partial y}(x;y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\frac{\partial v}{\partial x}(x;y)$$

23. 正則関数 $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$　(ただし $z = x + iy$) に対し、

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x;y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x;y) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x;y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x;y)$$

となることを示せ。

24. 正則関数 $f(z)$ が点 z_0 において $f(z_0) \neq 0$ のとき、$\log f(z)$ は点 z_0 で正則になり、次が成り立つことを示せ。

$$\frac{d\log f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

25. 次を示せ。

(a) コーシー・リーマン方程式を極形式で表すと

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r;\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r;\theta); \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r;\theta) = -r\frac{\partial v}{\partial r}(r;\theta)$$

となる。

(b) 正則関数 $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ を極形式で表すと

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)(\frac{\partial u}{\partial r}(r;\theta) + i\frac{\partial v}{\partial r}(r;\theta)) = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{ir}(\frac{\partial u}{\partial \theta}(r;\theta) + i\frac{\partial v}{\partial \theta}(r;\theta))$$

となる。

26. 複素関数 $f(z)$ が点 $z = z_0$ で正則ならば、

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

で定義される複素関数 $g(z)$ は点 $z = \overline{z_0}$ で正則であることを示せ。

27. 正則関数 $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$　(ただし $z = x + iy$) に対し次を示せ。

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x;y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x;y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x;y) = 0$$

(b)

$$g(z) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x;y) - \frac{\partial v}{\partial x}(x;y)) + i(\frac{\partial u}{\partial x}(x;y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x;y))$$

は正則関数。