非線形数理Ｉ試験問題の解答例

平成 12 年 7 月 18 日

問題１

1. （１５点）　予想を装う問題集の　２（４）番と同じ問題なので、その解答例を参照のこと。
2. （１５点）　予想を装う問題集の　１１（４）番と同じ問題なので、その解答例を参照のこと。
3. （１５点）　$z^3 = i$ を解く。$z = re^{i\mu}$ とおくと、$r^3e^{3\mu i} = i$。よって $r^3 = 1$ となるが、$r > 0$ なので $r = 1$ を得る。これを $r^3e^{3\mu i} = i$ に代入し、$e^{3\mu i} = i$　を得る。これより、

   $$3\mu = \frac{¼}{2} + 2k¼$$

   すなわち

   $$\mu = \frac{¼}{6} + \frac{2}{3}k¼$$

   を得る。ここに k は整数である。$k = 0; \S1; \S2; \S3; ¢¢¢$ を代入することにより、

   $$\underline{\S\frac{p\overline{3}}{2} + \frac{1}{2}i;\ \ ¡i}$$

   を答えとして得る。
4. （１５点）

   $$\begin{aligned} f(z) &= jz + ij^2 \\ &= j(x + yi) + ij^2 \\ &= jx + (y + 1)ij^2 \\ &= x^2 + (y + 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2y + 1 \end{aligned}$$

   なので

   $$\underline{u(x; y) = x^2 + y^2 + 2y + 1;\ v(x; y) = 0}$$

   が答え。

問題２　（１５点）　テキスト１０ページの例題１．１（３）を参照のこと。ただし、オイラーの公式と指数法則をどこでどのように使ったかがはっきりとはわからない場合は減点（この問題はそういう問題だから）。

問題３　（１５点）

$$
\begin{aligned}
&\iff && z_1, z_3 \text{ を通る直線と } z_2, z_3 \text{ を通る直線が直交} \\
&\iff && \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \text{が純虚数} \\
&\iff && \mathrm{Re}((z_1 - z_3)\overline{(z_2 - z_3)}) = 0 \\
&\iff && \overline{((z_1 - z_3)\overline{(z_2 - z_3)})} = -((z_1 - z_3)\overline{(z_2 - z_3)}) \\
&\iff && (\overline{z_1} - \overline{z_3})(z_2 - z_3) = -(z_1 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})
\end{aligned}
$$

これだけ沢山書かなくても、２行目以降のいくつかが書いてあれば○。

問題４　（１５点）　私の想像通りの出来でした。多くの人がこの問題に多大な時間をかけていたようだということが答案からうかがえます。完璧な答案は一人だけでした。以下に少し詳しく解説してみます。

「等高線を用いて、複素関数 $f(z) = z^2$ の写像としての様子を調べる」ことは、テキストに詳しく書かれているし、授業中にも詳述しました。z-平面、w-平面にそれぞれ以下のような図が描かれることになります。

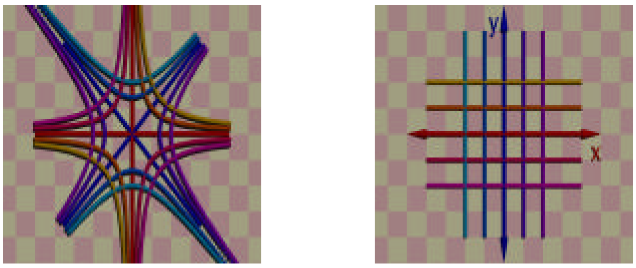


図 1: 複素関数 $w = z^2$　の写像の様子（等高線を用いた考察）

この問題での複素関数は $f(z) = (e^{\frac{\pi}{6}i}z)^2$ ですが、$f(z) = z^2$ のときと同様に取り組もうと思い、

$$
\begin{aligned}
& (e^{\frac{\pi}{6}i}z)^2 \\
= \;& e^{\frac{\pi}{3}i}z^2 \\
= \;& (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(x + iy)^2 \\
= \;& (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)(x^2 - y^2 + 2xyi) \\
= \;& \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - y^2) - xy + (\sqrt{3}xy + \frac{1}{2}(x^2 - y^2))i
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - y^2) - xy \\
v(x,y) &= \sqrt{3}xy + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)
\end{aligned}
$$

である、というのは正しいのですが、ここから先に進もうとするとなんだかさっぱりわからなくなる、というのが普通の状況でしょう。

ではどう考えればいいかというと、

$$e^{\frac{\pi}{6}i} \text{ を } z \text{ にかける}$$

ということの幾何的意味は

$$\text{原点を中心に} \quad z \text{ を } \frac{\pi}{6} \text{ 回転すること}$$

を思いだし、

$$e^{\frac{\pi}{6}i}z \text{ は複素関数なんだ}$$

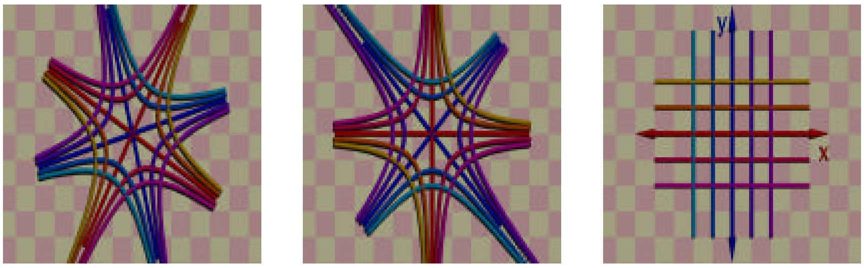
ととらえます。すると、この問題の複素関数は２つの複素関数

$$\zeta = e^{\frac{\pi}{6}i}z \quad \text{と} \quad w = \zeta^2$$

の合成関数なんだ、ということに気づくと思います。複素関数 $\zeta = e^{\frac{\pi}{6}i}z$ は定義域の複素平面を原点中心に３０度回転する写像だから、等高線を用いて

$$\zeta = e^{\frac{\pi}{6}i}z \quad \text{と} \quad w = \zeta^2$$

の合成関数の写像の様子を調べると、z-平面、ζ-平面、w-平面にそれぞれ以下のような図が描かれることがわかります。



結局、この問題は z-平面、w-平面にそれぞれ

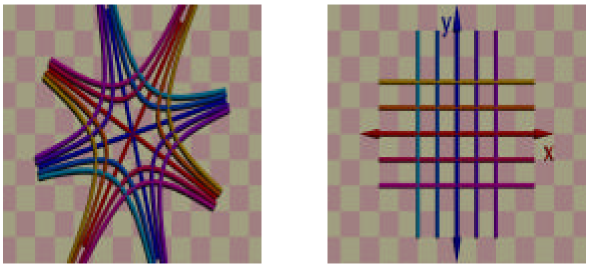


図 2: 複素関数 $w = (e^{\frac{\pi}{6}i}z)^2$ の写像の様子（等高線を用いた考察）

という図が描かれていたら正解です。