

非線形数理 : 予想を装う問題集

平成12年6月28日

以下、特に断らない限り $C \ni z, z_i (i \in N)$ とする。

1. 次の計算をし、結果を $x + iy (x, y \in R)$ の形で表せ。

$$(1) (3 - 2i) + (4 + 5i) \quad (2) (4 - 3i) - (3 + 2i) \quad (3) (3 + 2i)(2 - 3i)$$
$$(4) \frac{2 + 5i}{3 - 2i} \quad (5) \frac{3 + 2i}{6 - 2i} + \frac{3 - 4i}{2 + 6i}$$

2. 次の複素数の絶対値と偏角の主値を求め、さらに極形式 $z = re^{i\theta}$ で表せ。

$$(1) z = -1 + \sqrt{3}i \quad (2) z = -1 + i$$
$$(3) z = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \quad (4) z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$$

3. $\bar{\bar{z}} = z$ を示せ。

4. $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$ を示せ。

5. $z \in P \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ を示せ。ただし、 $P = \{z \in C | z = ia, a \in R\}$ とする。

6. $\frac{z_1}{z_2} \in R \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 \in R$ を示せ。

7. $\frac{z_1}{z_2} \in P \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 \in P$ を示せ。ただし、 $P = \{z \in C | z = ia, a \in R\}$ とする。

8. $\arg \bar{z} = -\arg z$ を示せ。

9. 2つの複素数 z_1, z_2 に対し、

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

が成立することを示し、また、この幾何学的な意味を説明せよ。

10. オイラーの公式と指数法則を用いて、次の式が成り立つことを示せ。

$$(1) \sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$(2) (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(3) |e^{i\theta}| = 1$$

11. 次の計算をし、結果を $x + iy (x, y \in R)$ の形で表せ。

$$(1) z = (-1 + \sqrt{3}i)^{10} \quad (2) z = (-\sqrt{3} + i)^{-4}$$

$$(3) z = \left(\frac{\sqrt{3} + 3i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{10} \quad (4) z = \left(\frac{2 + \sqrt{3} - i}{2 + \sqrt{3} + i} \right)^{2000}$$

12. z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形の重心 G は $G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ で与えられることを示せ。

13. 相異なる複素数 z_1, z_2, z_3 に対し、 z_1, z_2 を通る直線と、 z_1, z_3 を通る直線が直交するための条件を求めよ。

14. 複素平面において、2点 $1 + i, -2 + 3i$ を通る直線のパラメーター表示を求めよ。

15. 複素平面において、中心が $1 + i$ 、半径が2の円のパラメーター表示を求めよ。

16. 次の方程式で与えられる z の軌跡を複素平面に描け。

(1) $z - i\bar{z} = 0$ (2) $2|z - i| = |z + i|$

17. 次の代数方程式を解け。

(1) $z^3 = 1$ (2) $z^8 = 1$

(3) $z^4 = -1$ (4) $z^3 = -i$

18. 次の複素関数 $f(z)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ をそれぞれ求めよ。

(1) $f(z) = z^3$ (2) $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$

(3) $f(z) = \bar{z}^2$ (4) $f(z) = |z - 1|^2$

19. z 平面上の点 z が単位円 $|z| = 1$ を動くとき、次の等式で定められる点 w を w 平面上に描け。

(1) $w = (1 - i)z - 2i$

(2) $w = 4z + \frac{4}{z}$

20. 複素関数 $f(z) = \bar{z}$ に対応する二次の実正方行列が $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられることを示せ。