非線形数理 I ：予想を装う問題集の解答

平成 12 年 6 月 21 日

見苦しいところもありますが、参考にしてください。

1.

(1) $(3-2i)+(4+5i)=\underline{7+3i}$

(2) $(4-3i)-(3+2i)=\underline{1-5i}$

(3) $(3+2i)(2-3i)=\underline{12-5i}$

(4) $\dfrac{2+5i}{3-2i}=\dfrac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{6+4i+15i-10}{13}=\dfrac{-4+19i}{13}=\underline{-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}i}$

(5) $\dfrac{3+2i}{6-2i}+\dfrac{3-4i}{2+6i}=\dfrac{(3+2i)(6+2i)}{(6-2i)(6+2i)}+\dfrac{(3-4i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)}=\dfrac{14+18i}{40}+\dfrac{-18-26i}{40}=\dfrac{-4-8i}{40}=\underline{-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{5}i}$

2.

(1) $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$ より、$\underline{|z|=\sqrt{z\bar{z}}=2(=r)}$, $\mathrm{Arg}\ z=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=\tan^{-1}(-3)=\underline{\frac{2}{3}\pi(=\theta)}$

極形式の定義より、$\underline{z=2e^{i\frac{2}{3}\pi}}$

(2) $\bar{z}=-1-i$ より、$\underline{|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{2}(=r)}$, $\mathrm{Arg}\ z=\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)=\tan^{-1}(-1)=\underline{\frac{3}{4}\pi(=\theta)}$

極形式の定義より、$\underline{z=\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}}$

(3) $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=\sqrt{3}-i$ と置く。

$\bar{z_1}=\sqrt{3}-i$ より、$\underline{|z_1|=\sqrt{z_1\bar{z_1}}=2(=r_1)}$, $\mathrm{Arg}\ z_1=\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\underline{\frac{1}{6}\pi(=\theta_1)}$

$\bar{z_2}=\sqrt{3}+i$ より、$\underline{|z_2|=\sqrt{z_2\bar{z_2}}=2(=r_2)}$, $\mathrm{Arg}\ z_2=\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})=\underline{-\frac{1}{6}\pi(=\theta_2)}$

故に、

$$\underline{|z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=1(=r)}$$

$$\underline{\mathrm{Arg}\ z=\mathrm{Arg}\ \frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2=\frac{1}{3}\pi(=\theta)}$$

極形式の定義より、$\underline{z=e^{i\frac{1}{3}\pi}}$

(4) $z_1=1+\sqrt{3}i,\ z_2=1+i$ と置く。

$\bar{z_1}=1-\sqrt{3}i$ より、$\underline{|z_1|=\sqrt{z_1\bar{z_1}}=2(=r_1)}$, $\mathrm{Arg}\ z_1=\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1})=\underline{\frac{1}{3}\pi(=\theta_1)}$

$\bar{z_2}=1-i$ より、$\underline{|z_2|=\sqrt{z_2\bar{z_2}}=\sqrt{2}(=r_2)}$, $\mathrm{Arg}\ z_2=\tan^{-1}1=\underline{\frac{1}{4}\pi(=\theta_2)}$

故に、

$$\underline{|z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\sqrt{2}(=r)}$$

$$\underline{\mathrm{Arg}\ z=\mathrm{Arg}\ \frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2=\frac{1}{12}\pi(=\theta)}$$

極形式の定義より、$\underline{z=\sqrt{2}e^{i\frac{1}{12}\pi}}$

3.

$z=x+iy$ と置く。$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$ で、$\bar{\bar{z}}=\overline{x-iy}=x+iy=z$

4.
⇒) $z = x (\in R)$ に対して、$\bar{z} = \bar{x} = x = z$
⇐) $z = x + iy$ に対して、仮定より $z = \bar{z}$
これより、$y = 0$　故に $z \in R$
5.
⇒) $z = iy (\in P)$ に対して、$\bar{z} = \overline{iy} = -iy = -z$
⇐) $z = x + iy$ に対して、仮定より $z = -\bar{z}$
これより、$x = 0$　故に $z \in P$
6.
⇒) $R \ni \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} = \dfrac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}, \quad |z_2|^2 \in R$ より $z_1\bar{z_2} \in R$

⇐) $R \ni z_1\bar{z_2} = z_1\bar{z_2}\dfrac{z_2}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}|z_2|^2, \quad |z_2|^2 \in R$ より $\dfrac{z_1}{z_2} \in R$
7.
⇒) $P \ni \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} = \dfrac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}, \quad |z_2|^2 \in R$ より $z_1\bar{z_2} \in P$

⇐) $P \ni z_1\bar{z_2} = z_1\bar{z_2}\dfrac{z_2}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}|z_2|^2, \quad |z_2|^2 \in R$ より $\dfrac{z_1}{z_2} \in P$
8.
$\theta = \arg z$ とするとき、極形式の定義から $z = re^{i\theta}$ $(r = |z|)$ と書ける。
$\bar{z} = re^{i(-\theta)}$ $(|z| = |\bar{z}| = r)$ より、$\arg \bar{z} = -\theta = -\arg\theta$
9.

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) + (z_1 - z_2)(\bar{z_1} - \bar{z_2}) \\
&= (z_1\bar{z_1} \underline{+ z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1}} + z_2\bar{z_2}) + (z_1\bar{z_1} \underline{- z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1}} + z_2\bar{z_2}) \\
&= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)
\end{aligned}
$$

幾何学的には、三角形の３辺と中線との平方関係
10.
(1) オイラーの公式より、$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2) \qquad \cdots(a)$
指数法則から、$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{i\theta_1}e^{i(-\theta_2)}$

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i(-\theta_2)} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)) \\
&= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

$\cdots(a)$ と虚部を比較することで証明できた。
(2) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (De\ Moivre's\ formula)$
(3) $|e^{i\theta}| = \sqrt{e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}}} = \sqrt{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \sqrt{e^{i\theta - i\theta}} = \sqrt{e^0} = 1$

11.

(1)

$$
\begin{aligned}
z &= (-1+\sqrt{3}i)^{10} \\
&= 2^{10}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10} \\
&= 1024(\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi))^{10} \\
&= 1024(\cos(\frac{20}{3}\pi)+i\sin(\frac{20}{3}\pi)) \\
& \quad 20 = 6\times 3+2 \text{ より、} \cos(\frac{20}{3}\pi)=\cos(\frac{2}{3}\pi),\ \sin(\frac{20}{3}\pi)=\sin(\frac{2}{3}\pi) \\
&= 1024(\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi)) \\
&= -512+512\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
z &= (-\sqrt{3}+i)^{-4} \\
&= 2^{-4}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})^{-4} \\
&= \frac{1}{16}(\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi))^{-4} \\
&= \frac{1}{16}(\cos(-\frac{10}{3}\pi)+i\sin(-\frac{10}{3}\pi)) \\
&= \frac{1}{16}(\cos(\frac{10}{3}\pi)-i\sin(\frac{10}{3}\pi)) \\
& \quad 10 = 6\times 1+4 \text{ より、} \cos(\frac{10}{3}\pi)=\cos(\frac{4}{3}\pi),\ \sin(\frac{10}{3}\pi)=\sin(\frac{4}{3}\pi) \\
&= \frac{1}{16}(\cos(\frac{4}{3}\pi)-i\sin(\frac{4}{3}\pi)) \\
&= -\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i
\end{aligned}
$$

(3) $z_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}i,\ z_2=1-\sqrt{3}i$ **と置く。**
$z_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2\sqrt{3}(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$ **故に、**$|z_1|(=r_1)=2\sqrt{3},\ \mathrm{Arg}\ z_1=\frac{\pi}{3}$
$z_2=1-\sqrt{3}i=2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$ **故に、**$|z_2|(=r_2)=2,\ \mathrm{Arg}\ z_1=-\frac{\pi}{3}$

$$|z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\sqrt{3},\ \mathrm{Arg}\ z=\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2=\frac{2}{3}\pi$$

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{3}^10(\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi))^{10} \\
&= 243(\cos(\frac{20}{3}\pi)+i\sin(\frac{20}{3}\pi)) \\
&= 243(\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi)) \qquad (see\ 11.(1)) \\
&= -\frac{243}{2}+\frac{243\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

(4)

$$\begin{aligned}
\frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i} &= \frac{(2+\sqrt{3}-i)^2}{(2+\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}-i)} = \frac{(2+\sqrt{3})^2-2i(2+\sqrt{3})+i^2}{(2+\sqrt{3})^2-i^2} \\
&= \frac{6+4\sqrt{3}-4i-2\sqrt{3}i}{8+4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})-2i(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

故に、$z = \left(\frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{2000} = (\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{2000}$

$$\begin{aligned}
z &= (\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{2000} \\
&= (\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))^{2000} \\
&= (\cos(-\frac{2000\pi}{6})+i\sin(-\frac{2000\pi}{6})) \\
&= (\cos(-\frac{1000\pi}{3})+i\sin(-\frac{1000\pi}{3})) \\
&= (\cos(\frac{1000\pi}{3})-i\sin(\frac{1000\pi}{3})) \\
& \quad 1000 = 6\times 166+4 \text{ より、} \cos(\frac{1000}{3}\pi) = \cos(\frac{4}{3}\pi),\ \sin(\frac{1000}{3}\pi) = \sin(\frac{4}{3}\pi) \\
&= (\cos(\frac{4\pi}{3})-i\sin(\frac{4\pi}{3})) \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

12.
$\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{Oz_2}+\frac{2}{3}\vec{OH} \quad \cdots(1)$
$\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{Oz_1}+\frac{1}{2}\vec{Oz_3}$ **より、**(1) **に代入すればいい。**

13.

$$\begin{aligned}
& (z_1,\ z_2\text{を通る直線}) \perp (z_1,\ z_3\text{を通る直線}) \\
\Leftrightarrow\ & (z_2-z_1) \text{ は } (z_3-z_1) \text{ の } mi \text{ 倍。} (m\in R) \\
\Leftrightarrow\ & (z_2-z_1) = mi(z_3-z_1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \in P \quad (Def\ of\ P,\ see\ 5.) \\
\Leftrightarrow\ & \underline{A.\ (z_2-z_1)\overline{(z_3-z_1)} \in P} \quad (see\ 7.)
\end{aligned}$$

14.
$z_1 = 1+i,\ z_2 = -2+3i$ と置くと、$\underline{z = (1-t)(1+i) + t(2+3i)}$
15.
$z = 1 + i + 2e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]$
16.
(1) $z = x + iy$ と置くと、$i\bar{z} = i(x - iy) = ix + y,\ z = i\bar{z}$ より、
$x + iy = ix + y \ \Leftrightarrow\ (x-y) - i(x-y) = 0$
故に、直交座標において $y = x$ で表される直線。
(2) $z = x + iy$ と置くと、$2|x + i(y-1)| = |x + i(y+1)| \quad \cdots (a)$
(a) を２乗すると、
(左辺)$= 4|x + i(y-1)|^2 = 4x^2 + 4(y-1)^2$
(右辺)$= |x + i(y+1)|^2 = x^2 + (y+1)^2$
故に、

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4(y-1)^2 &= x^2 + (y+1)^2 \\
4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 \\
3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 &= 0 \\
x^2 + y^2 - \frac{10}{3}y + 1 &= 0 \\
x^2 + (y - \frac{5}{3})^2 &= \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

故に、中心が $i\frac{5}{3}$、半径が $\frac{4}{3}$ の円。
17.
(1) $z = re^{i\theta} \quad (r = |z| > 0) \quad \cdots (a)$ と置く。
$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 1 \quad \cdots (b)$
(b) 式の絶対値を取ると、
$|1| = 1 = |r^3 e^{i3\theta}| = |r^3||e^{i3\theta}| = r^3 |e^{i3\theta}|$
$r^3 = 1$ で $r > 0$ より、$r = 1$。これを (b) に代入すると、
$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = e^{i3\theta} = 1$
ド・モアブルの公式より、
$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = 1$ より、$\cos 3\theta = 1,\ \sin 3\theta = 0$
このような $3\theta = 0, 2\pi, 4\pi$ で、故に $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$。これと、$r = 1$ を (a) に代入して、
$z = e^0 = 1$
$z = e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos(\frac{4}{3}\pi) + i\sin(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) $z = re^{i\theta} \quad (r = |z| > 0) \quad \cdots (a)$ と置く。
$z^8 = r^8 e^{i8\theta} = 1 \quad \cdots (b)$
(b) 式の絶対値を取ると、
$|1| = 1 = |r^8 e^{i8\theta}| = |r^8||e^{i8\theta}| = r^8 |e^{i8\theta}|$
$r^8 = 1$ で $r > 0$ より、$r = 1$。これを (b) に代入すると、

$z^8 = r^8 e^{i8\theta} = e^{i8\theta} = 1$
ド・モアブルの公式より、
$e^{i8\theta} = \cos 8\theta + i \sin 8\theta = 1$ **より、**$\cos 8\theta = 1,\ \sin 8\theta = 0$
このような $8\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi, 14\pi$ **で、故に** $\theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$。**これと、**$r = 1$ **を** (a) **に代入して、**
$z = e^0 = 1$
$z = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z = e^{i\frac{1}{2}\pi} = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i\sin(\frac{1}{2}\pi) = i$
$z = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$
$z = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \cos(\frac{5}{4}\pi) + i\sin(\frac{5}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi) = -i$
$z = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

(3) $z = re^{i\theta} \quad (r = |z| > 0) \quad \cdots(a)$ **と置く。**
$z^4 = r^4 e^{i4\theta} = -1 \quad \cdots(b)$
(b) **式の絶対値を取ると、**
$|-1| = 1 = |r^4 e^{i4\theta}| = |r^4||e^{i4\theta}| = r^4|e^{i4\theta}|$
$r^4 = 1$ **で** $r > 0$ **より、**$r = 1$。**これを** (2) **に代入すると、**
$z^4 = r^4 e^{i4\theta} = e^{i4\theta} = -1$
ド・モアブルの公式より、
$e^{i4\theta} = \cos 4\theta + i \sin 4\theta = -1$ **より、**$\cos 4\theta = -1,\ \sin 4\theta = 0$
このような $4\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ **で、故に** $\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$。**これと、**$r = 1$ **を** (a) **に代入して、**
$z = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \cos(\frac{5}{4}\pi) + i\sin(\frac{5}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$z = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

(4) $z = re^{i\theta} \quad (r = |z| > 0) \quad \cdots(a)$ **と置く。**
$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = -i \quad \cdots(b)$
(b) **式の絶対値を取ると、**
$|-i| = 1 = |r^3 e^{i3\theta}| = |r^3||e^{i3\theta}| = r^3|e^{i3\theta}|$
$r^3 = 1$ **で** $r > 0$ **より、**$r = 1$。**これを** (2) **に代入すると、**
$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = e^{i3\theta} = -i$
ド・モアブルの公式より、
$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = -i$ **より、**$\cos 3\theta = 0,\ \sin 3\theta = -1$
このような $3\theta = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi$ **で、故に** $\theta = \frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$。**これと、**$r = 1$ **を** (a) **に代入して、**
$z = e^{i\frac{1}{2}\pi} = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i\sin(\frac{1}{2}\pi) = i$
$z = e^{i\frac{7}{6}\pi} = \cos(\frac{7}{6}\pi) + i\sin(\frac{7}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
$z = e^{i\frac{11}{6}\pi} = \cos(\frac{11}{6}\pi) + i\sin(\frac{11}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

あと、もう少しガンバロー

18.

(1)

$$\begin{aligned} z^3 &= (x+iy)^3 \\ &= x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3 \\ &= x^3+3x^2yi-3xy^2-iy^3 \\ &= (x^3-3xy^2)+i(-y^3+3x^2y) \end{aligned}$$

故に, $u(x,y)=x^3-3xy^2,\ v(x,y)=-y^3+3x^2y$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} &= \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i} \\ &= \frac{(x+(y-1)i)(x-(y+1)i)}{(x+(y+1)i)(x+-(y+1)i)} \\ &= \frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

故に, $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2},\ v(x,y)=\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$

(3)

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= (x-iy)^2 \\ &= x^2-y^2-2xyi \\ &= (x^2-y^2)+i(-2xy) \end{aligned}$$

故に、 $u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=-2xy$

(4)

$$\begin{aligned} |z-1|^2 &= |(x-1)+iy|^2 \\ &= ((x-1)+iy)((x-1)-iy) \\ &= (x-1)^2+y^2 \end{aligned}$$

故に、 $u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=0$

19. (1) **点** z **は、原点を中心とし、半径** 1 **の円上を動くから、**

$|z|=1 \quad \cdots(a)$

与式を変形すると、

$z=\dfrac{w+2i}{1-i}$

これを (a) **に代入すると、**

$\left|\dfrac{w+2i}{1-i}\right| = \dfrac{|w+2i|}{|1-i|} = 1$
よって、$|w+2i| = |1-i|$

$|1-i| = \sqrt{2}$ であるから、$|w+2i| = \sqrt{2}$

故に、点 w の描く図形は、点 $-2i$ を中心とし、半径 $\sqrt{2}$ の円

(2) $w = 4z + \dfrac{4}{z},\ |z| = 1$ から、$w = 4z + \dfrac{4}{z}\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = 4z + \dfrac{4\bar{z}}{|z|^2} = 4(z+\bar{z})$

$z+\bar{z}$ は、実部の 2 倍で、$z = x+iy$ と置くと、$z+\bar{z} = 2x,\ |z| = 1$ より、

$-1\cdot\ \ x\cdot\ \ 1$ であるから $-2\cdot\ \ 2x = z+\bar{z}\cdot\ \ 2$　よって $-8\cdot\ \ w\cdot\ \ 8$

故に、点 w の描く図形は 2 点-8,8 を結ぶ線分

20.

$z = x+iy$ とすると、$f(z) = \bar{z} = u(x,y) + iv(x,y) = x - iy$

これより、

$$\begin{cases} u(x,y) \overset{put}{=} u = 1x + 0y \\ v(x,y) \overset{put}{=} v = 0x + (-1)y \end{cases}$$

となって、行列を使えば

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり、証明できた。