収束と連続、演習問題の解答例

平成 11 年 12 月 24 日

赤で囲まれているところはリンク（クリックしてみるとわかる)。
１月の「非線型数理 II」の授業で使う予定。各自で印刷して持ってくるように。

1. $a_n \le b_n \le c_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ を示せ。

解答 仮定の後半より、任意の正の実数 ε に対し自然数 $N(a), N(b)$ が存在して、

$$|a_n - \alpha| \quad < \quad \varepsilon \quad (\forall n > N(a)) \tag{1}$$
$$|c_n - \alpha| \quad < \quad \varepsilon \quad (\forall n > N(c)) \tag{2}$$

となっている。$N = \max(N(a), N(c))$ とおく。N はもちろん自然数である。(1) より、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (\forall n > N) \tag{3}$$

となっているし、(2) より

$$|c_n - \alpha| < \varepsilon \quad (\forall n > N) \tag{4}$$

となっている。他方、仮定の前半より

$$a_n - \alpha \le b_n - \alpha \le c_n - \alpha \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \tag{5}$$

であるから、(3)、(4)、(5) より

$$|b_n - \alpha| < \varepsilon \quad (\forall n > N)$$

となる。よって

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha。 \qquad \Box$$

2. $a_n \le b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$。

解答 仮定の後半より、任意の自然数（正の実数と言ってもよい、同じこと）M に対し ある自然数 N が存在し、

$$a_n > M \quad (\forall n > N) \tag{1}$$

となっている。さらに仮定の前半より $a_n \le b_n$ なので両方の不等式を繋ぎあわせると

$$b_n > M \quad (\forall n > N) \tag{1}$$

を得る。よって

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

である。 $\Box$

3. 数列 $\{a_n\}$ が収束して $a_n < M \quad (n = 1, 2, \ldots)$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n \le M$ であることを示せ。($\lim_{n\to\infty} a_n < M$ という結論は誤りか？)

解答 この問題のような「成り立ちそうだけどどうやって示すんだろう？」と思えるような問題に出くわしたときは**背理法**が効果的。

仮に

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le M \tag{1}$$

でないとして矛盾を導く。(1) でなければ $\lim_{n\to\infty} a_n > M$、すなわち、$\lim_{n\to\infty} a_n - M > 0$ である。

$$\varepsilon_0 = \lim_{n\to\infty} a_n - M \tag{2}$$

とおく。数列 $\{a_n\}$ が収束することの定義を思い出すと、この ε_0 に対してもある自然数 N_0 が存在して

$$|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon_0 \quad (\forall n > N_0)$$

となっているのである。 これと (2) より

$$a_n > M \quad (\forall n > N_0)$$

がわかるが、これは仮定の後半に矛盾する。よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le M$$

でなければならない。 $\square$

数列 $\{-\frac{1}{n}\}$ を考えてみると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} &< 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) &= 0 \end{aligned}$$

の両方を満たしている。よって $\lim_{n\to\infty} a_n < M$ とは必ずしも言えない。

4. α, β は有限な定数で $\alpha > \beta$ とする。数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ とこの α, β に対し $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} = \beta$ ならば、ある番号から先のすべての n について $a_n > b_n$ であることを示せ。

解答 $\alpha > \beta$ なので $\alpha - \beta > 0$。従って

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

とおくと $\varepsilon > 0$ となり、ε は正の実数となる。$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} = \beta$ なので、この正の実数 ε に対し自然数 $N(\alpha)$ が存在し、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n > N(\alpha)) \tag{1}$$

であり、また、自然数 $N(\beta)$ が存在し、

$$|b_n - \beta| < \varepsilon \quad (n > N(\beta)) \tag{2}$$

である。$N = \max(N(\alpha), N(\beta))$ とおくと (1),(2) より

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &< \varepsilon \quad (n > N) \\ |b_n - \beta| &< \varepsilon \quad (n > N) \end{aligned}$$

が共に成り立っているが、

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

なのだから、

$$a_n > b_n \quad (n > N)$$

であることがわかる。 □

5. a を正の定数とする。$a_1 = a, a_2 = a + \frac{1}{a}, a_3 = a + \frac{1}{a+\frac{1}{a}}, \ldots$ として帰納的に定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答 大学の数学では**極限値が存在するかどうか**を問うことが多く、そのようなことを扱うときは極限の定義に戻って考えなければならないが、この問題のように**極限値を求めよ**と問われているときは（通常は）極限値は存在するものとして考えてよい。すなわち、（通常は）定義に戻る必要はない。

数列 $\{a_n\}$ の極限値が存在するとしそれを b とおく。

$$a_n = a + \frac{1}{a_{n-1}}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}$$

となる。$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = b$ なので、

$$b = a + \frac{1}{b}$$

を得る。これを解いて（b は正なので）

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$$

となる。 □

6. a を正の実数とし、$a_n = a^{\frac{1}{n}}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (a^{\frac{1}{n}}) \\
&= a^{\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})} \\
&= a^{\frac{1}{\lim_{n\to\infty} n}} \\
&= a^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

「3 番目の等式が成り立つ」ことは当たり前に見えるかもしれないが、これは実は関数 $\frac{1}{x} \quad (x > 0)$ が連続だから成り立つこと（定理６）。「2 番目の等式が成り立つ」ことが気になる人がいるかもしれないが、これは $\frac{1}{x} \quad (x > 0)$ という関数に比べるとより複雑そうな $a^x \quad (x > 0)$ という関数が連続だから成り立つこと。どちらの等式も（考えている関数は異なるが）その成立根拠は同様のもの。では、関数 $a^x \quad (x > 0)$ は連続か？定理７、８と例題６、７を組み合わせると連続であることがわかる。 □

7. 「関数 f が $x = a$ で連続でない」の定義を $\varepsilon,\ \delta$ を用いて述べよ。

解答 収束とか連続とか距離とか位相とかでは背理法を使うことが多い。背理法が使えるようになるには $\forall$ や $\exists$ などの記号が入っている命題の否定が正確にできねばだめ。この問題はそのための演習問題。命題の否定に慣れていない人は

命題の否定の特訓用の演習問題

をやって慣れるようにしよう（慣れれば驚くほど簡単）。

$\forall$ や $\exists$ などの記号が入っている命題の否定を行なうには（ビギナーのうちは）機械的におこなった方が呑み込みやすいかもしれない。そのために、「関数 f が $x=a$ で連続」ということを記号ばかりでまず書いてみる。

$$\begin{aligned} &\text{関数 } f \text{ が } x=a \text{ で連続} \\ \Leftrightarrow\ & {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}\delta>0 \text{ such that} \\ & a-\delta<{}^{\forall}x<a+\delta,\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon \end{aligned}$$

となる。この下を否定すれば、「関数 f が $x=a$ で連続でない」ということを記号で表したことになる。$\forall$ と $\exists$ を機械的に交換し、($\exists$ の後に 「such that」 をつける、$\forall$ の後に 「,」をつけるなどの）いくつかのルールを守って書き替えればそれで否定は完成する。実行すると

$$\begin{aligned} &\text{関数 } f \text{ が } x=a \text{ で連続でない} \\ \Leftrightarrow\ & {}^{\exists}\varepsilon>0 \text{ such that } {}^{\forall}\delta>0, \\ & a-\delta<{}^{\exists}x<a+\delta \text{ such that } |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon \end{aligned}$$

となる。

8. $f(x)$ が連続ならば $|f(x)|$ も連続であることを示せ。

解答 実数の集合 $\mathbf{R}$ の任意の点 $x=a$ で $|f(x)|$ が連続であることを示せばよい。場合分けをして示す。

$|f(a)|>0$ **の場合** この場合は例題１１より、

$${}^{\exists}\delta_+>0 \text{ such that } a-\delta_+<{}^{\forall}x<a+\delta_+,\ |f(x)|>0$$

となる。よって中間値の定理より

$$(+)\qquad {}^{\exists}\delta_+>0 \text{ such that } a-\delta_+<{}^{\forall}x<a+\delta_+,\ f(x)>0$$

または

$$(-)\qquad {}^{\exists}\delta_+>0 \text{ such that } a-\delta_+<{}^{\forall}x<a+\delta_+,\ f(x)<0$$

となる。どちらでも話は同様なので (+) だと仮定し話を進める（ここのところを「(+) と仮定しても一般性を失わない」と書くとカッコイイ)。関数 f は $x=a$ で連続なので、

$$(f)\qquad {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}\delta_f>0 \text{ such that } a-\delta_f<{}^{\forall}x<a+\delta_f,\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

となる。

$$\delta=\min(\delta_+,\ \delta_f)$$

とおく。すると、$a-\delta<x<a+\delta$ をみたすすべての実数 x に対し、(+) より $|f(x)|=f(x)$ なので (f) の $f(x)$ を $|f(x)|$ におきかえてもよい。よって $|f(x)|$ は $x=a$ で連続である。
□

$|f(a)| = 0$ **の場合** この場合、$f(a) = 0$ なので、関数 f の $x = a$ での連続性から

$$(f) \qquad {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta_f > 0 \text{ such that } a - \delta_f < {}^{\forall}x < a + \delta_f,\ |f(x)| < \varepsilon$$

を得る。

$$\begin{aligned} ||f(x)| - |f(a)|| &= ||f(x)| - 0| \\ &= ||f(x))|| \\ &= |f(x)| \end{aligned}$$

なので、(f) より $|f(x)|$ は $x = a$ で連続であることがわかる。 □

9. $f(x),\ g(x)$ が連続ならば、$\max(f(x), g(x)),\ \min(f(x), g(x))$ も連続であることを示せ。

解答

$$\begin{aligned} \max(f(x), g(x)) &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \\ \min(f(x), g(x)) &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} \end{aligned}$$

である（**ここがポイント**）。$f(x),\ g(x)$ がおのおの連続なので定理７とこの問題の直前の問題より

$$f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ |f(x) - g(x)|$$

はおのおの連続となる。従って（再び定理７より）$\max(f(x), g(x)),\ \min(f(x), g(x))$ の分子はおのおの連続。分母の 2 を（単なる数字ではなく、２という値をとらせる）恒等関数だと思うと、定理７を再度使い $\max(f(x), g(x)),\ \min(f(x), g(x))$ が連続であることがわかる。 □

10. $|f(x)|$ が連続ならば、$f(x)$ も連続であるか？

解答 このような問題はグラフを考えて「明らかに嘘だな」とすぐに気付くようになりたい。例えば、

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 0) \\ \ \ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

とおけば反例になる。

11. $a < b < c$ で、関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続、関数 g は閉区間 $[b, c]$ で連続であり、さらに、$f(b) = g(b)$ であるとする。関数 h を、

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in [a, b]) \\ g(x) & (x \in [b, c]) \end{cases}$$

と定義すると、h は閉区間 $[a, c]$ で連続であることを示せ。

解答 グラフを頭に思い浮かべてみると、「f は連続なのだからグラフは繋がっている」、「g も連続なのだからグラフは繋がっている」、「f のグラフの右の端と g のグラフ左の端は $f(b) = g(b)$ なので繋がっている」ということから「h のグラフも繋がっている」ことになり、h は連続であるということが直感的にはすぐわかる。

でも皆さんは厳密な思考を訓練中のビギナーなのですから、ここでは連続の定義（定義６）にのっとった証明を与えておくことにします。

閉区間 $[a, c]$ 上の任意の点 $x = x_0$ に対し、

(i) $h(x)$ の値が $x = x_0$ で定義されていて、

(ii) 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ が存在して

$$|x - x_0| < \delta$$

となる $x \in [a, c]$ に対しては必ず

$$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

が成立する。

を示せばよい。

$a \leq x_0 < b$ **の場合** この場合 $h(x_0) = f(x_0)$ であり、(i) はO．K．任意の正の実数 ε に対し、関数 f は閉区間 $[a, b]$ 上で連続なのだから、正の実数 δ_f が存在し $|x - x_0| < \delta_f$ となる $x \in [a, b]$ に対しては必ず $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ が成立している。区間 $[a, b]$ 上では $h(x) = f(x)$ なので $|x - x_0| < \delta_f$ となる $x \in [a, b]$ に対しては必ず $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ が成立していることになる。さらに、

$$\delta = \min(\delta_f, b - x_0)$$

とおくと $|x - x_0| < \delta$ となる $x \in [a, \mathrm{c}]$ に対しては必ず $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ が成立していることになる。 □

$b < x_0 \leq c$ **の場合** この場合 $h(x_0) = g(x_0)$ であり、(i) はO．K．任意の正の実数 ε に対し、関数 g は閉区間 $[b, c]$ 上で連続なのだから、正の実数 δ_g が存在し $|x - x_0| < \delta_g$ となる $x \in [b, c]$ に対しては必ず $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ が成立している。区間 $[b, c]$ 上では $h(x) = g(x)$ なので $|x - x_0| < \delta_g$ となる $x \in [b, c]$ に対しては必ず $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ が成立していることになる。さらに、

$$\delta = \min(\delta_g, x_0 - b)$$

とおくと $|x - x_0| < \delta$ となる $x \in [a, \mathrm{c}]$ に対しては必ず $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ が成立していることになる。 □

$x_0 = b$ **の場合** 両方の繋ぎめであるここが一番問題なのである。正の実数を任意にひとつとり、ε とおく。f が閉区間 $[a, b]$ で連続なので、この ε に対し正の実数 δ_f が存在し $|x - x_0| < \delta_f$ となる $x \in [a, b]$ に対しては必ず $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ が成立している。また、g が閉区間 $[b, c]$ で連続なので、この ε に対し正の実数 δ_g が存在し $|x - x_0| < \delta_g$ となる $x \in [b, c]$ に対しては必ず $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ が成立している。

$$\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$$

とおくと、h の構成よりこの ε に対し $|x - x_0| < \delta$ となる $x \in [a, c]$ に対しては必ず $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ が成立している。 □

12. 有理関数は分母が 0 となる点を除いて連続であることを示せ。

解答

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

という形の関数で、$f_1(x)$, $f_2(x)$ ともに多項式であるとき $f(x)$ を有理関数と呼んだ。例題 6 より、$f_1(x)$, $f_2(x)$ はともに $\mathbf{R}$ 全体で連続。$f_2(a) \neq 0$ であれば、定理 7 より $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ は $x = a$ において連続。よって $f(x)$ は分母が 0 となる点を除いて連続である。 □

13. 閉でない区間 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ および有界でない閉区間 (a, ∞), $(-\infty, b)$ 上では中間値の定理は成り立たない。反例を挙げよ。

解答 (a,b) **上**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (a,b]) \\ 0 & (x \notin (a,b]) \end{cases}$$

$(a,b]$ **上**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (a,b]) \\ 0 & (x \notin (a,b]) \end{cases}$$

$[a,b)$ **上**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [a,b)) \\ 0 & (x \notin [a,b)) \end{cases}$$

$[1,\infty)$ **上**

$$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$$

この関数に対しては $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty)$ が存在しない。

$(-\infty,-1]$ **上**

$$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$$

この関数に対しては $\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty)$ が存在しない。

14. 中間値の定理を用いて、任意の３次方程式は必ず実数解をもつことを示せ。

解答 任意の３次方程式は

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

と書ける。３次方程式の実数解とは（１）を満たす実数 x のことであった。(１) の左辺は長いので面倒だから

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおく。すると

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

となる（**ここがポイント**）。同様に

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & (a > 0) \\ \infty & (a < 0) \end{cases}$$

ともなる。３次多項式 $f(x)$ は連続関数であることに注意すると、このことより、十分大きな実数 $M >> 0$ に対し、$a > 0$ ならば

$$\begin{aligned} f(M) &> 0 \\ f(-M) &< 0 \end{aligned}$$

となり、$a < 0$ ならば

$$\begin{aligned} f(M) &< 0 \\ f(-M) &> 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。いずれの場合も $f(M)$ と $f(-M)$ との間に 0 があるので、閉区間 $[-M, M]$ 上の $f(x)$ に対し中間値の定理を適用すると、$f(c) = 0$ となる c が $-M$ と M の間にあることになり実数解の存在がわかる。 □