

次元について

1992年11月12日

数学概論Iでは n 次元ベクトル空間 R^n の部分ベクトル空間 V の次元というものを考えました。どういうものだったかという「 V の基底をなすベクトルの数」を V の次元 $\dim V$ と呼んでいたのです。すなわち、 $\{v_1, \dots, v_k\}$ を V の基底とすると $\dim V = k$ だったわけです。例えば、 R^n の標準的な基底として単位ベクトル達 $\{e_1, \dots, e_n\}$ があるので $\dim R^n = n$ です。「その部分ベクトル空間の最小限の骨組みの数」とか「その部分ベクトル空間の自由度の数」とかが次元の直観的な意味です。

しかし頭にいれておかねばならないことがひとつあります。上の次元の定義は「ベクトル空間としての次元の定義」ということです。世の中にはいろいろな次元の考え方があって、「次元」という単語は（残念ながら）常に同じ意味で使われているわけではありません。従って「次元イコール上述の定義」と頭に染み込ませておくと訳の解らないことになりかねません。

次元という単語が入ってくる言葉として、思いつくまま並べると

1. 前者と後者とでは次元が違う
2. 次元が低い話
3. ユークリッド空間の次元
4. 多様体の次元
5. ハウスドルフ次元

等があります。

このうち最初の2つは日常会話でよく使われる言葉で「次元」という単語に厳密な定義が与えられているとは思えません。「次元」という単語を「レベル」や「尺度」あるいは「難度」という単語と同意語的に用いていると思えます。

残りの3つはどれも数学用語です。まず3番の「ユークリッド空間の次元」ですがユークリッド空間という単語は人に依って使い方が微妙に違って、また、「内積の入っている実ベクトル空間をユークリッド空間と呼ぶ」という定義の仕方が最も標準的と思えますがこの定義自体君達にはわかりづらいと思えるので、「ユークリッド空間」イコール「ベクトル空間」と思っておいて下さい。従って、「ユークリッド空間の次元」イコール「ベクトル空間の次元」。

次に4番の「多様体の次元」ですが、「多様体」というものが「ベクトル空間」とは異なるので「多様体の次元」も「ベクトル空間の次元」とは意味が異なります。多様体とは（曲

がってなくてもいいんだけど普通は)曲がっている図形でベクトル空間の拡張概念と思って下さい。「多様体の次元」は「ベクトル空間の次元」を基礎にして定義される「次元」で大ざっぱに言うと曲線である輪ゴム(右図)は曲がっていても線なので1次元だと言いたい、曲面である浮き輪の表面(右図)は曲がっているけどなにしろ面だから2次元だと言いたいという要求からきた「曲がっている図形の次元」の定義で、数学は幾何学のなかに「多様体論」とか「トポロジー」というのがありそれを勉強すれば必ずできます。

最後に5番目のハウスドルフ次元についてですが、「フラクタル」という言葉を聞いたことがある人もいると思います。「複雑なことは複雑であるけれども自己相似的な構造を持っている図形」を総称して「フラクタル図形」と呼んでいます。リアス式海岸のような海岸線は航空写真で見るとギザギザしていますが山の上から見てもギザギザしている、もっと近づいて海岸線上に立って真下の波打ち際を見てもやっぱりギザギザしているというようにマクロなレベルで見てもミクロなレベルで見ても相似な図形を得ることができると思えます。このような図形を自己相似的であるといいます。月のクレーターなんかもその例だと思えます。

このような図形に対して「次元」というものを考えようと思うと、曲がり方があまりに複雑すぎるので、曲がっている図形に対する次元である「多様体の次元」ではいろいろと不都合が生じてしまうのです。しかし、「自己相似的である」という性質に注目した自然な次元の定め方があってそれがハウスドルフ次元(ハウスドルフという人が考え始めた次元)と呼ばれるものです。このハウスドルフ次元の特徴は「次元が整数とは限らない」ということです。例えば、ハウスドルフ次元が1.5の図形なんてのが平気であらわれてきます。ハウスドルフ次元が整数にならない図形は、我々の常識外のことが色々おこっていて大変面白いのですが数学的な厳密な取扱いは大変難しいのです。興味がある人は読み易そうな文献を挙げておきますから眺めてみて下さい。

1. 読み易そうな参考文献

- (a) 「別冊サイエンス(別冊24) 数学ゲームI、マーチン・ガードナー著、日本経済新聞社」の中の13章 怪物曲線、14章 白色と褐色の音楽
- (b) 「広中平祐の数学教室、広中平祐著、サンケイ出版」の中の次元に関する章達
- (c) 「フラクタル、高安秀樹著、朝倉書店」