# Gauss-Jordan 法なんでやねん (気になる人へ)

１９９３年6月23日

Gauss-Jordan 法は，与えられた $n$ 次正方行列 $A$ の逆行列を求める方法でした．復習すると，

(**step1**)　$A$ と $n$ 次単位行列 $I_n$ をならべ，$n$ 行 $2n$ 列の行列

$$A' = (A, I_n)$$

を作る．
(**step2**)　$A'$ に Gauss の消去法を実行し，左半分を上三角行列にする（行列の言葉で書き直すと，$A'$ に，Gauss の消去法の各操作を表わす行列　$B_1, B_2, \ldots, B_k$ を左からかけてゆき

$$B_k B_{k-1} \cdots B_2 B_1 A$$

が上三角行列となるようにする）．
(**step3**)　さらに Gauss の消去法の真似を実行し，左半分を単位行列 $I_n$ にする（行列の言葉で書き直すと，$B_k B_{k-1} \cdots B_2 B_1 A$ に，Gauss の消去法の真似の各操作を表わす行列　$C_1, C_2, \ldots, C_\ell$ を左からかけてゆき

(1) $$C_\ell C_{\ell-1} \cdots C_2 C_1 (B_k B_{k-1} \cdots B_2 B_1 A) = I_n$$

となるようにする）．

すると右半分の

(1) $$(C_\ell C_{\ell-1} \cdots C_2 C_1)(B_k B_{k-1} \cdots B_2 B_1) I_n$$

(2) $$= C_\ell C_{\ell-1} \cdots C_2 C_1 B_k B_{k-1} \cdots B_2 B_1$$

が $A$ の逆行列になっている．という方法でした．

$C_\ell C_{\ell-1}\cdots C_2C_1B_kB_{k-1}\cdots B_1$ が $A$ の逆行列になっていることをみるには（1）が解っているので

$$A(C_\ell C_{\ell-1}\cdots C_2C_1B_kB_{k-1}\cdots B_2B_1)=I_n \tag{2}$$

のみ示されればいいわけです.（2）を示す鍵は

$B_i \quad (1\le i\le k), C_j \quad (1\le j\le \ell)$ は Gauss の消去法（やその真似）の各操作を表わす行列

というところにあります. $B_i \quad (1\le i\le k)$ や $C_j \quad (1\le j\le \ell)$ が表わしている操作の逆操作を行列で表わすと，$B_i$ や $C_j$ の逆行列 $B_i^{-1} \quad (1\le i\le k)$ や $C_j^{-1} \quad (1\le j\le \ell)$ となります.（1）に

$$B_1^{-1}B_2^{-1}\cdots B_{k-1}^{-1}B_k^{-1}C_1^{-1}C_2^{-1}\cdots C_{\ell-1}^{-1}C_\ell^{-1}$$

を左からかけると

$$A=B_1^{-1}B_2^{-1}\cdots B_{k-1}^{-1}B_k^{-1}C_1^{-1}C_2^{-1}\cdots C_{\ell-1}^{-1}C_\ell^{-1} \tag{3}$$

となりますが,（3）に

$$C_\ell C_{\ell-1}\cdots C_2C_1B_kB_{k-1}\cdots B_2B_1$$

を右からかけると（2）を得ます.