行列式虎の巻

１９９４年１１月8日

1　「行列式」ってなんだ？

ｎ次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して A の行列式

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

というものが定義されます。どういうふうに定義されるかというと「a_{ij} 達を成分とする関数であってしかも後の章で述べる**僅か３つの基本的な性質**を満たすもの」として定義されます。行列式はとにかく a_{ij} 達の関数なのです。だから、行列 A の各成分 a_{ij} に具体的な数を代入すれば行列式　$|A|$ は数になります。「数を正方形に並べたもの」ではなく「ひとつの数」になるんですよ。だから行列と行列式は名前も記号も似ていますが違うものなんですよ。

2　自由に質問して下さい

質問があります　長方形の行列の行列式ってどんなのですか？正方形の行列ばっかり特別扱いしたら長方形の行列が可哀そう。

お答えします　どんなに可哀そうでも正方形の行列に対してしか行列式というものは考えません。

質問があります　どうして違うもの（行列と行列式）に似たような名前と記号を使うのですか？

お答えします　違うと言っても全く独立なものではありません。ｎ次正方行列の立場から見れば、自分の行列式は自分のｎ次元体積を表していることになるのです。すなわち、（正方）行列の大きさを式で表したものが行列式なのです。

質問があります　だけど行列式の定義って、なんか当たり前みたいな性質がポンポンポンと３つあるだけで、式で表されているって感じがしないんですけど？先生嘘ついたあ。

お答えします　　１行１列の行列 $A=(a)$ の行列式は $|A|=a,$ ２行２列の行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の 行列式は　$|A|=ad-bc$ となります。だから、私達が今学んでいる行列式は**高校での行列式の一般化**に過ぎないのです。ｎ行ｎ列の場合もこういうふうに $|A|=$ これこれ　と具体的に記述したくなるのは人情というものです。しかしそれは（不可能ではありませんが）大変ややこしく、「置換」という新しい概念（通常の線形代数の教科書には必ず出てくる）を導入しなければなりません。さらに「具体的に記述するメリット」もそれほどありません。「どうしても具体的に記述したい。そうしないと夜も眠れない。」という人は４章で出てくる「性質１１　**余因子展開**」というものに注目してください。これを繰り返し、繰り返し使っていけばなんとかなります。幸運を祈ります。

質問があります　　でもやっぱりまだなんか変な気がする。そもそも「僅か３つの基本的な性質」を満たす関数っちゅうのが２つとか３つとかあったらどうするんですか？ちゃんとひとつの関数に決まるっちゅう保証がないと定義にならないような気がするんすけど。例えば、カローラの特徴を３個ほど述べた後で「その特徴を満たしている車をカローラと呼ぶ」と言ったって例えばコロナもその特徴を満たしてたらどうするんすか？

お答えします　　まさにその通りで「ちゃんとひとつの関数に決まるっちゅう保証」がほんとうは必要です。上述している「性質１１　余因子展開」を繰り返し、繰り返し使えば保証を与えることができるということがわかります。「具体的な記述」はややこしくとも、「ちゃんとひとつの関数に決まるっちゅう保証」は簡単に得ることができるわけです。

質問があります　　こんなややこしそうな物いったいなんの役にたつんですか？

お答えします　　いろいろと重宝する可愛いやつですがこの授業で行列式を取り扱う主たる目的は２つあってひとつは「連立一次方程式の解に対する**Ｃｒａｍｅｒの公式**」で、連立一次方程式の解は行列式を使って簡単に表示できるのです。もうひとつは「後ほど取り扱う予定の**固有値**が行列式を使って定義される」ためです。行列式の定義自体はスカッとしていないように見えても、行列式の概念を使えば行列に纏わるいろいろなことをスカッと説明できるのです。

3　僅か３つの基本的な性質

性質１．　単位行列の行列式は１

$$|E_n|=\begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}=1$$

性質２．　どの行に関しても線形　　例えば、第１行に関して線形というのは次の性質のことです。

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}+\beta b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \quad \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性質３．　行を交換すると行列式は符号を変える　次の例は第１行と第２行を交換したものですが同様のことがどの２つの行の交換でも言える。

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

4　たった８つの有用な性質

３章では行列式を定義する３つの基本的な性質を学びました。この３つはあまりに基本的なので「それがどうした？」って感じでピンとこないかもしれません。だけど、ほんとは大変パワフルな性質たちです。そのパワフルさは、以下の８つの性質が導かれることからも窺えます。

性質４．　同じ行が２つあったら行列式はゼロ　例えば第１行と第２行が同じだったら

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0
$$

性質５．　ある行の何倍かをほかの行から引いても行列式は変わらない　この性質は計算するとき大変重要。Ｇａｕｓｓの消去法を実行するとき、ピボットを含む行を何倍かしてほかの行から引きましたがこういう操作をしても行列式は変わらないと言っている。例えば第１行を α 倍して第２行から引いても次のように変わらない。

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - \alpha a_{11} & a_{22} - \alpha a_{12} & \cdots & a_{2n} - \alpha a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性質６．　ある行がゼロベクトルなら行列式はゼロ　例えば、

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0
$$

性質７．　行列 A が三角行列ならばその行列式は主対角線上の要素の積　　例えば、上三角行列の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn}$$

性質８．　行列 A が正則行列　$\iff |A| \neq 0$　　この性質により、与えられた行列が正則行列かどうかを行列式で判定できます。行列式の効用のひとつです。

性質９．　$|AB| = |A||B|$　　A が逆行列 A^{-1} を持つ場合、$AA^{-1} = E_n$ に性質９を適用すれば、$|A||A^{-1}| = |E_n| = 1$ となるので性質８の「左から右」の証明ができました。

性質１０．　$|A^T| = |A|$　　性質２から性質６までは行に関する性質でしたが、この性質１０のおかげで列に関する性質でもあるということが解ります。すなわち、性質２から性質６までの「行」という字を「列」という字に替えた性質も成り立つ。

性質１１．　行列式はどの行に対しても余因子展開できる　　こいつあ難しそうだ。まず、「２章に繰り返し出てきたので大事なんだ。」と思って下さい。それから、「性質１０があるから「行」を「列」に替えてもいいんだろう。」と気を回して下さい　（すると、「行列式は列列式になるんだな。」などと思うのは上げ足取りというものです）。次に余因子の説明をします。ｎ次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して a_{ij} を含む行（第ｉ行）と列（第ｊ列）を除いてできる（ｎ－１）次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを行列 A の（ｉ，ｊ）**余因子**といい A_{ij} という記号で表します。性質１１は

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

ということを言っていてこれを**行列式の余因子展開**だとか**展開公式**だとかいいます。見た目は難しそうですが実際に使ってみると比較的分かりやすいものです（慣れの問題）。性質１１により、行列式が帰納的に計算できるということが解ります。さらに連立一次方程式の解の公式であるＣｒａｍｅｒの公式はこの性質１１を使って得ることができます。性質１１を使った計算例をあげておくと

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
= \quad & 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
= \quad & (5 \times 9 - 6 \times 8) - 2 \times (4 \times 9 - 6 \times 7) + 3 \times (4 \times 8 - 5 \times 7) \\
= \quad & -3 + 2 \times 6 - 3 \times 3 = 0
\end{aligned}
$$

5　Ｃｒａｍｅｒの公式

やあ諸君、わしゃあＣｒａｍｅｒ（クレイマーではなくクラーメルと発音する、スイス人だから）じゃ、もう死んじょるんじゃが。昔昔にわしが考えたことを披露しようかのう。

ｎ次正方行列

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

の行列式は第１行で余因子展開すると

$$
|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}
$$

となったわけじゃな（性質１１）。A の第１行を変えて第２行と同じにすると性質４から行列式はゼロなわけじゃ。余因子展開の右辺はどのように変わるかのお？行列は

$$
\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

となるんだから、ええっとお、右辺は

$$
a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n}
$$

となるわけだな。するってえと

$$
0 = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n}
$$

なわけか。同じように A の第１行を変えて第ｉ行 $(i \neq 1)$ と同じにすると

$$
0 = a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{in}A_{1n}
$$

というのが得られるのお。あれっ、

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となっとるのお。うーむ。この右辺をベクトルじゃあなく行列にしたいのう。うーむ、うーむ。あー、そうかそうか、最初の余因子展開を第１行でやっとったが、これを第１行だけじゃあなくて他の行でもすることにして同様なことを考えると（ここのところはちょっと解りにくいかもしれんが大丈夫かの？）、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A|E_n$$

となるから逆行列を余因子で表すことができるじゃあないかあ。いやあ、わしって頭ええのう、我ながら惚れ惚れしてしまう。とりあえずちょっとメモしとこ。

逆行列の公式　　n次正方行列 の行列式 $|A|$ がゼロでないならば、A の逆行列　A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

と表される。ただし、A_{ij} は A の（ｉ，ｊ）余因子を表すものとする。

２行２列の場合にやってみると

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となって高校で習ったやつがうまいことでてきよるわい。更に、この「逆行列の公式」から「$|A| \neq 0$ ならば A の逆行列がある」ということもわかるから性質８の「右から左」も示せたことになるな。あれっ、まてよ。そうすると連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

の解も（A の逆行列があるときは　$A^{-1}\boldsymbol{b}$ と表されるのだから）A の余因子を用いて表されることになるな。よーしよーし。もうちょっと工夫すると諸君が「Ｃｒａｍｅｒの公式」と呼んでくれる立派なものができるやもしれん。興奮してきたぞ。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \quad \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

となるわけか。この右辺の分子ベクトルの各成分は性質１１の

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

というのと似てるようでちょっと違うんのう。あ、そういえば性質１０ってのがあったから列に対しても余因子展開できるんだったな。書いてみよっと。

$$|A| = a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}$$

か。おー、似てきた似てきた。そうかそうか、行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を第ｉ列で余因子展開すると

$$b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots b_nA_{ni}$$

となって解の第１成分 x_i の分子とぴったり一致するな。よーし、これでわしの公式ができたわい。いやあ、めでたいめでたい。

Ｃｒａｍｅｒの公式　　A をｎ次正則行列（逆行列のある行列）とする。連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の第ｉ成分 x_i は

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と表すことができる。

6　「行列式を計算しなさい」と言われたら

計算するときは、以下のような方針で計算すれば「こいつできるな。」って感じになります。

基本テクニック　行列式の値を変えないように行列の基本変形を行い（性質５）、ある行（あるいは列）になるべく多くの０（ゼロ）を作る。どの行（あるいは列）に注目するかは与えられた行列を睨んで決める。

多くのゼロを作る目的は次の３つのうちのどれかです。どの方針を採用するかはやはり与えられた行列を睨んで決める。

方針（イ）　　注目した行（あるいは列）で行列式を展開する（性質１１）。

方針（ロ）　　上三角行列（あるいは下三角行列）の行列式にする（すると性質７よりすぐ計算できる）。

方針（ハ）　　A_{11}, A_{22} を正方行列だとし、

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_{11}} & A_{12} \\ O & \boxed{A_{22}} \end{vmatrix} \quad や \quad \begin{vmatrix} \boxed{A_{11}} & O \\ A_{21} & \boxed{A_{22}} \end{vmatrix}$$

といった形の行列式に変形する。

7　問題

問題１.（方針（イ）の練習問題）　（１）、（２）は値を求め、（３）は等式を示しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & -9 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & -9 \\ 4 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\{(b-d)^2+(a-c)^2\}$$

問題２.（方針（ロ）の練習問題）　（１）は値を求め、（２）は等式を示しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} & & & & a_n \\ & \text{\Large 0} & & a_{n-1} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & a_2 & & \text{\Large 0} & \\ a_1 & & & & \end{vmatrix}$$

(2) $$n\left\{\underbrace{\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a & a \\ a & a+b & \ddots & a & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a & \ddots & a+b & a \\ a & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}}_{\text{n}}\right. = (na+b)b^{n-1}$$

問題３.（方針（ハ）の練習問題）A, B をｎ次正方行列とする。以下を示しなさい。

(3) $$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

(4) $$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\sqrt{-1}B||A-\sqrt{-1}B|$$

問題４．　（１）　ある行の入れ替えと、ある列の入れ替えを行うことにより

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}$$

となる２次正方行列 A, B を作りなさい。
（２）　次の等式を証明しなさい。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

問題５．　次の連立一次方程式を x, y, z について解きなさい。ただし、$a \neq b, b \neq c, c \neq a$ であるものとする。

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ ax+by+cz &= d \\ a^2x+b^2y+c^2z &= d^2 \end{cases}$$

問題６．　３次元の平行六面体でその頂点達が

$$[0,0,0],\ [-1,2,4],\ [3,-2,1],\ [1,3,2],$$
$$[-1,2,4]+[3,-2,1],\ [-1,2,4]+[1,3,2],$$
$$[3,-2,1]+[1,3,2],\ [-1,2,4]+[3,-2,1]+[1,3,2]$$

であるものの体積を求めなさい。

問題７．　ｎ次正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとする。さらに A の各要素はすべて整数とする．そのとき次の（１）,（２）を示しなさい．
（１）　A^{-1} も各要素がすべて整数であれば次のいずれかの場合が成り立つ．

$$\det(A) = \det(A^{-1}) = 1$$
$$\det(A) = \det(A^{-1}) = -1$$

（２）　（１）の逆も成り立つ．

問題８．　ｎ次正方行列 B がｎ次正方行列 A, M を使い　$B = M^{-1}AM$　と表されているとする。すると　$\det(B) = \det(A)$　となることを示しなさい。

問題９．　ｎ次正方行列 A はどの行についても要素の和はゼロになるものとする。A の行列式の値はいくらになりますか？