

『特異点と分岐』

— 人はみな Singularitist —

横浜国立大学 西村尚史

平成 13 年 12 月 7 日

視覚情報は人間が外界から受け取る情報の 80-90 パーセントを占め、その重要性はとても高い。3DCG に関する話題は、形の表現法という純粋に幾何学的なものから、光と色の諸現象に関する光学的計算や、眼の機能を考慮した視覚心理学的なものなど多岐にわたるが、その多くは実は数理的なものである。これらのことを考慮し、3DCG を通して数学の一分野である「可微分写像の特異点論」の紹介を試みる。

月曜日、火曜日、および、金曜日の後半にはプロジェクタを使用して多くのグラフィックスを紹介し、とにかくまず楽しんでもらい、そしていろいろ考えてもらう予定である。それにより、「可微分写像の特異点論」の面白さ、意義、重要性を感じ取ってもらえれば目的は達せられたと言える。

月曜日予定（プロジェクタ使用）

1. フリーのレイトレーサー POV-Ray の紹介
2. POV-Ray で描いた曲面の紹介
3. 学生作品の紹介
4. POV-Ray が様々な分野で使われている例の紹介
5. IRTC の紹介
6. POV-Ray を使った画像の描き方その 1

火曜日予定（プロジェクタ使用）

1. 滑らかな自由曲線や自由曲面
2. POV-Ray を使った画像の描き方その 2（曲面のパラメトリック表示）
3. 「3DCG を描くときの 3 つのポイント」の説明
4. 一変数実関数の増減表とグラフの概形，一変数複素関数 $f_0(z) = z^2$ の写像としての様子

水曜日予定（黒板使用）

1. 逆関数の定理，陰関数の定理
2. 可微分写像の特異点，特異点の A -同値，特異点の安定性
3. 標準形

木曜日予定（黒板使用）

1. 特異点の安定性の判定法
2. ジェット
3. トムのジェット横断性定理の特別な形
4. 実多元環

金曜日予定（前半は黒板，後半はプロジェクタ使用）

1. マザーの分類定理
2. 平面写像の安定特異点の分類
3. ホイットニーのくさびの数
4. 数学のアニメーション

1 月曜日の予定

1.1 POV-Ray の紹介

POV-Ray(<http://www.povray.org/>) の特徴を説明する．書籍としては，[小室 1, 小室 2] などを勧める．

1.2 POV-Ray で描いた曲面の紹介

1. <http://www.uib.no/People/nfytn/mathgal.htm>
2. <http://www.ipfw.edu/math/Coffman/steinersurface.html#Equations>
3. <http://abulafia.mt.ic.ac.uk/Bulatov/gallery/>
4. <http://www.asahi-net.or.jp/~nj2t-hg/ilpovj.htm>

1.3 学生作品の紹介

1. <http://www.ne.jp/asahi/nishimura/takashi/jyugyou/graduate/mapping.html>
2. <http://www.ne.jp/asahi/nishimura/takashi/jyugyou/ensyuu01.htm#sakuhin>
3. <http://zugaku.mae.osaka-cu.ac.jp/>, <http://e-www.akashi.ac.jp/~ynakai/Gallery/index.html>

1.4 POV-Ray が様々な分野で使われている例の紹介

1. http://xray.bmc.uu.se/markh/notes/howto/molray_gallery.html (化学系)
2. <http://tech.millto.net/~yoichiro/> (化学系)
3. <http://163.130.33.11/nakamura/3DHistology/index.html> (医学系)
4. <http://www.geocities.com/anomalocarid/make.html> (古生物系, [笹沢] にはより詳しい情報が載っている)
5. <http://www.oita-h.ed.jp/laboratory.html> (物理系)
6. <http://www.arch.oita-u.ac.jp/a-kse/96/sk1996.htm> (建築系)

1.5 IRTC の紹介

IRTC とは Internet Ray-Tracing Competition の略であり, POV-Ray チームがやっている, レイトレーシングの国際競技会である．静止画像は2ヶ月に一度, 動画は4ヶ月に一度, それぞれテーマが決められて, そのテーマに即した画像が世界中から送られてくる．IRTC のホームページには, 応募されたすべての画像が置いてあり, しかもそのほとんどの画像はソースつきで置いてあ

るので優れた資源になっていると言える。1997年には「Physics and Math.」というテーマで静止画像が募集されており、100を超える静止画像が応募されている。

1. <http://www.irtc.org/> (IRTC)
2. <http://www.irtc.org/stills/1997-06-30/view.html> (Physics and Math.)

1.6 POV-Ray を使った画像の描き方その 1

書籍としては、[小室 1, 小室 2] などを勧める。[小室 1] はバージョン 3.0 の POV-Ray 用の書籍であり、現時点でのバージョンは 3.1。バージョン 3.1 とバージョン 3.0 とは完全な上位互換とは言えない多少の違いがあるので、バージョン 3.0 用のシーンファイルの中にはバージョン 3.1 では動かないものもある。しかし、[小室 2] はアニメーションに関する記述がほとんどないのに対し [小室 1] はアニメーションに関する記述が豊富、しかもアニメーションに関してはバージョンの違いによる変更点はない、などの事情があるので [小室 1] も依然有用である。

シーンファイル 1 (sphere.pov)

```
camera{
    location <0, 5, -3>
    look_at <0, 0, 0>
}

light_source { <10, 20, 0>
    color rgb <1.0, 1.0, 1.0>
}

sphere { <0, 0, 0>, 2
    texture{
        pigment { color rgb <0.8, 0.2, 0.7> }
        //normal {bumps 0.6 scale 0.1 }
        finish {
            ambient 0.2
            diffuse 0.4
            reflection 0.4
            specular 0.5
        }
    }
}

plane { y, -4
    texture {
        pigment { checker rgb <0.3, 0.6, 0.3> rgb <0.1, 0.3, 0.7> }
    }
}
```

シーンファイル 2 (nandaro.pov) POV-Ray コミュニティーでは著名な肥後さん作

```

#include "colors.inc"

camera {
    location <30, 0, -60>
    angle 45
    look_at <0, 5, 0>
}

light_source {<50, 100, 50> color White}
light_source {<20, 30, 18> color White}

#declare Oleaf = intersection {
    sphere { <1, 0, 1.732> 2.01 }
    sphere { <1, 0, 1.732> 2 inverse}
    box{ <0, 0, 0> < 2, 2, -2> rotate x*-10}
    box{ <0, 0, 0> < 2, -2, -2> rotate x*10}
}

#declare Cno =12
#declare Cn =0 #while (Cn <Cno)
    #declare Xr =Cn/Cno*50
    #declare Yr =Cn*210
    #declare Xp =0
    #declare Yp =-Cn/10
    #declare Zp =0
    #declare Cto =30
    #declare Ct =0 #while (Ct < Cto)
        #declare Xr =Xr+3+Ct/Cto*2
        #declare Yr =Yr
        union{
            cylinder {<0,-0.05,0>,<0,1.05,0>, 0.3*(1-Ct/Cto)+0.05 scale z*0.7}
            object { Oleaf scale <5*sin((15+155*Ct/Cto)/180*pi), 5,
5*sin((15+155*Ct/Cto)/180*pi)> rotate z*Ct/Cto*70}
            object { Oleaf translate x*-2 scale <5*sin((15+155*Ct/Cto)/180*pi),
5, 5*sin((15+155*Ct/Cto)/180*pi)> rotate z*-Ct/Cto*70}
            rotate <Xr,Yr,0> translate <Xp,Yp,Zp>
            pigment {color rgb <0.4+0.4*Ct/Cto-Cn/Cno*0.2,
0.6+0.4*Ct/Cto-Cn/Cno*0.3, 0>}
        }
        finish {
            ambient 0.3
            crand 0.1
            reflection 0.3
            specular 1.0
        }
    }

```

```

        brilliance 1.0
    }
}
#declare Xp =Xp+sin(Xr*pi/180)*sin(Yr*pi/180)
#declare Yp =Yp+cos(Xr*pi/180)
#declare Zp =Zp+sin(Xr*pi/180)*cos(Yr*pi/180)
#declare Ct = Ct+1 #end
#declare Cn = Cn+1 #end

sky_sphere {
    pigment {
        gradient y
        color_map {
            [ 0.5 color LightSteelBlue ]
            [ 1.0 color White ]
        }
        scale 2
        translate -1
    }
}

```

今日の宿題 1.1 次の問題を家で解いてみてください。

【a～gの解答群】

ア. $(1-t)^2$	イ. t^2	ウ. $3(1-t)t$	エ. $(1-t)$
オ. t^2	カ. t	キ. $2(1-t)t$	ク. $(1-t)^2$
ケ. $3(1-t)t^2$			

【h～jの解答群】

ア. エルミート	イ. パラメトリック	ウ. 外形点	エ. ベジエ
オ. ノット	カ. 制御点	キ. Bスプライン	

第5問

CADやDTPなどで図形をコンピュータで取り扱う場合には、図形を直線および円弧などの2次曲線の組み合わせで表現する方法がしばしば用いられる。しかし、より一般的な図形を取り扱うためには、任意の形状の曲線を表現する必要がある。

以下の文章は、ある曲線の決定方法について述べたものである。□に最も適する語句または式を解答群からそれぞれ選び、記号で答えよ。

平面上の2点 P_0 、 P_1 を結ぶ線分上の点 P_{01} は、変数 $t \in [0, 1]$ を用いて次のように表すことができる。この t は、線分 P_0P_1 を P_{01} で分割する際の内分比である。(図1)

$$P_{01} = P_0(1-t) + P_1t \dots\dots\dots (1)$$

いま、この平面上に1点 P_2 を追加し、線分 P_1P_2 を同じ内分比 t で分割する。この点を P_{12} としたとき、線分 P_0P_{12} を内分比 t で分割する点 P_{012} の位置は次式で求めることができる。(図2)

$$P_{012} = P_{01}(1-t) + P_{12}t = P_0 \square a + P_1 \square b + P_2 \square c \dots\dots\dots (2)$$

さらにこの平面上に1点 P_3 を追加する。 P_2P_3 を内分比 t で分割する点を P_{23} 、線分 P_0P_{23} を内分比 t で分割する点を P_{023} としたとき、線分 $P_{012}P_{023}$ を内分比 t で分割する点 P_{0123} の位置は次式で求めることができる。(図3)

$$P_{0123} = P_{012}(1-t) + P_{023}t = P_0 \square d + P_1 \square e + P_2 \square f + P_3 \square g \dots\dots (3)$$

この例のように、変数 t を変化させたときの点の軌跡によって表される曲線を一般に□h曲線とよぶ。式(3)は3次の□i曲線である。この曲線の軌跡は P_0 、 P_1 、 P_2 、 P_3 の4点により決定されるから、それらの位置を曲線のデータとして記録しておけば、後で同じ曲線を再現することが可能になる。このような点のことを曲線の□jという。

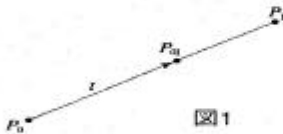


図1

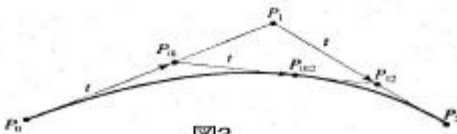


図2

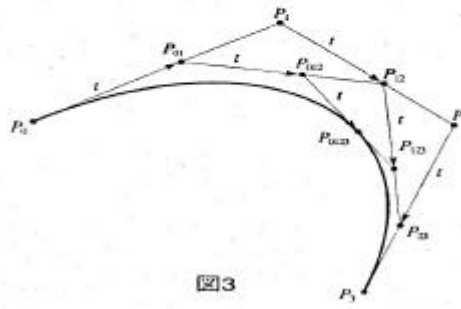


図3

2 火曜日の予定

2.1 滑らかな自由曲線や自由曲面

昨日の宿題は平成11年度後期マルチメディア検定2級に出題された問題である([CG-ARTS]が参考文献)。この問題はベジエ曲線というものをうまく説明している。二次曲線などの代数曲線、パラメータ表示を使ったサイクロイド、あるいは極座標によるレムニスケートやリマソンなどのような数学的な記述方法や曲線の性質がよく分かっている曲線ではなく、フリーハンドで描くような自由な曲線を、滑らかに、しかもコントロール可能であり自動化をも可能とする方法で描きたいという欲求がおることがある。Bezier¹もそうであった。Bezierはルノーというフランスの自動車

¹1910年生まれ。

会社に勤めていたカーデザイナーであったが、1960年頃から車のいろいろな部分のデザインをコンピュータを用いて機械化・自動化する研究を行い、今でいうところの「ベジエ曲線」にたどり着いた（[碓, CLO]などを参照されたい）。曲面についても同様に自由曲面を必要とする場面が頻繁にあるが、ベジエ曲線を2次元化すればベジエ曲面が得られる。ベジエ曲線（曲面）以外にも自由曲線（曲面）を描く方法はいろいろとあり、それぞれ「NURBS」であるとか「Bスプライン」、「有理ベジエ」、「双3次」だとかの名前を付けて呼ばれる（このあたりの概略が知りたい人には[技術編]を勧めたい。大学におけるCGの授業の標準的テキストとなるように書かれており、CG検定2級レベルを大きく凌駕しているよくまとまっている本であると思う）。数学的見地からこれらの曲線（曲面）の特徴を述べておくと、いずれも滑らかではあるものの、決して「 C^∞ 級」の曲線（曲面）ではあり得ない（ C^∞ 級となるように繋ぐには「1の分割」という可微分多様体論では良く知られた方法を使わなければならないが、自由曲線（曲面）に使われる関数はすべて初等関数である。）しかし、 C^1 級でも C^∞ 級でも見た目の違いは全くなく、グラフィックスとしては C^1 級の滑らかさで十分。

ベジエ曲線はアウトラインフォントにも使われている。たとえば次の「え」はベジエ曲線で作られている。



実は、通常の3DCGの作業は「モデリング」という作業と「レンダリング」という作業に分けられる。「モデリング」という作業では、マウスを動かしたりしながら、作りたい画像にあった図形の形をディスプレイ上に直接作っていく。ディスプレイ上に現れる図形は、自由曲面である。それに対して「レンダリング」というと、光源から光を放射し、物体にあたって反射・屈折・散乱・透過し、その光がまた物体にあたって…、という計算をコンピュータがある程度の段階まで行い、「物体に光が当たった状態」を作り出す作業である。POV-Rayはレンダラーであり、モデリング機能は（ほとんど）ない。従って、POV-Rayで自由曲線（曲面）を描こうと思ったら、「モデラーで作った図形のデータをPOV-Rayにインポートする」という方法がよく採用される。たとえば上のマーライオンの画像はPOV-Rayで描かれているが、曲面はモデラーで作ってある（miyokenさん作）。

2.2 POV-Rayでの画像の描き方その2（曲面のパラメトリック表示）

自由曲面のように曲面を数学的に貼りあわせているわけではなく、数学的には $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ という一つの写像の像に過ぎない「パラメトリック表示」と呼ばれる方法による曲面でも、実は多角

形の貼り合わせを行っていて、実際は多面体を描いている。多面体が滑らかに見える理由は、「面の数が多い」ということもさることながら、多面体上に自然な連続ベクトル場を作り、そのベクトル場を法ベクトル場とする C^1 曲面（もともとのパラメトリック表示されている曲面の近似曲面）が網膜上に描かれるように光のコントロールをしているということが大きな理由だと思われる（後ほど行う予定の実験により納得できるはず）。以下のインクルードファイルは多面体と多面体上の自然な連続ベクトル場を自動で生成するユーティリティプログラムである。

曲面のパラメトリック表示を行うには mesh を使ったパッチワークを行うことになる。POV-Ray の現在のバージョン（バージョン 3.1）では、パラメトリック表示を直接行う機能は備わっていない²。パラメトリック表示を自動で行わせるインクルードファイル (parametric.inc) をノルウェーの T. Nordstrand さんが作って公開しておられるので、これを使う。

インクルードファイル (parametric.inc)

```
#declare surface =
  mesh
{
#declare iu      = (umax-umin)/uiter      //increment per step
#declare iv      = (vmax-vmin)/viter
#declare counter = 0
#declare vv      = vmin

#while (vv<=vmax) //outer loop
  #declare uu = umin
  #while (uu<=umax) //inner loop

//POINTS
  #declare x1=#include "uuvv.x" //Calculate the
  #declare y1=#include "uuvv.y" //four points in
  #declare z1=#include "uuvv.z" //the rectangle defined
  #declare uu=uu+iu //by uu,uu+iu,vv,vv+iv
  #declare x2=#include "uuvv.x" //Uses uu and vv because
  #declare y2=#include "uuvv.y" //u and v are built in
  #declare z2=#include "uuvv.z" //constants.
  #declare vv=vv+iv
  #declare x3=#include "uuvv.x"
  #declare y3=#include "uuvv.y"
  #declare z3=#include "uuvv.z"
  #declare uu=uu-iv
  #declare x4=#include "uuvv.x"
  #declare y4=#include "uuvv.y"
  #declare z4=#include "uuvv.z"
  #declare vv=vv-iv
```

²もうすぐ出そうな次期バージョンであるバージョン 3.5（現在ベータ版がダウンロード可能）では、パラメトリック表示を直接行う機能が備わっているようである。それ以外にも大きく進歩しているようであるので、バージョン 3.5 のマニュアルの和訳をどうするか悩むところである。


```

//NORMALS    used for smoothing triangles
#declare vv=vv-iv          //Calculate surface normals
#declare nx1=#include "uuvv.x" //to the nine rectangles in
#declare ny1=#include "uuvv.y" //the immediate neighbourhood
#declare nz1=#include "uuvv.z"
#declare uu=uu+iu
#declare nx2=#include "uuvv.x"
#declare ny2=#include "uuvv.y"
#declare nz2=#include "uuvv.z"
#declare uu=uu+iu
#declare vv=vv+iv
#declare nx3=#include "uuvv.x"
#declare ny3=#include "uuvv.y"
#declare nz3=#include "uuvv.z"
#declare vv=vv+iv
#declare nx4=#include "uuvv.x"
#declare ny4=#include "uuvv.y"
#declare nz4=#include "uuvv.z"
#declare vv=vv+iv
#declare uu=uu-iu
#declare nx5=#include "uuvv.x"
#declare ny5=#include "uuvv.y"
#declare nz5=#include "uuvv.z"
#declare uu=uu-iu
#declare nx6=#include "uuvv.x"
#declare ny6=#include "uuvv.y"
#declare nz6=#include "uuvv.z"
#declare uu=uu-iu
#declare vv=vv-iv
#declare nx7=#include "uuvv.x"
#declare ny7=#include "uuvv.y"
#declare nz7=#include "uuvv.z"
#declare vv=vv-iv
#declare nx8=#include "uuvv.x"
#declare ny8=#include "uuvv.y"
#declare nz8=#include "uuvv.z"
#declare uu=uu+iu
//Here is where normals are calculated.
#declare n1=vcross(<x1-nx1,y1-ny1,z1-nz1>,<x1-nx8,y1-ny8,z1-nz8>)
#declare n2=vcross(<x1- x2,y1- y2,z1- z2>,<x1-nx1,y1-ny1,z1-nz1>)
#declare n3=vcross(<x1- x4,y1- y4,z1- z4>,<x1- x2,y1- y2,z1- z2>)
#declare n4=vcross(<x1-nx8,y1-ny8,z1-nz8>,<x1- x4,y1- y4,z1- z4>)
#declare normal1=n1+n2+n3+n4

```

```

#declare n1=vcross(<x2-nx2,y2-ny2,z2-nz2>,<x2- x1,y2- y1,z2- z1>)
#declare n2=vcross(<x2-nx3,y2-ny3,z2-nz3>,<x2-nx2,y2-ny2,z2-nz2>)
#declare n3=vcross(<x2- x3,y2- y3,z2- z3>,<x2-nx3,y2-ny3,z2-nz3>)
#declare n4=vcross(<x2- x1,y2- y1,z2- z1>,<x2- x3,y2- y3,z2- z3>)
#declare normal2=n1+n2+n3+n4
#declare n1=vcross(<x3- x2,y3- y2,z3- z2>,<x3- x4,y3- y4,z3- z4>)
#declare n2=vcross(<x3-nx4,y3-ny4,z3-nz4>,<x3- x2,y3- y2,z3- z2>)
#declare n3=vcross(<x3-nx5,y3-ny5,z3-nz5>,<x3-nx4,y3-ny4,z3-nz4>)
#declare n4=vcross(<x3- x4,y3- y4,z3- z4>,<x3-nx5,y3-ny5,z3-nz5>)
#declare normal3=n1+n2+n3+n4
#declare n1=vcross(<x4- x1,y4- y1,z4- z1>,<x4-nx7,y4-ny7,z4-nz7>)
#declare n2=vcross(<x4- x3,y4- y3,z4- z3>,<x4- x1,y4- y1,z4- z1>)
#declare n3=vcross(<x4-nx6,y4-ny6,z4-nz6>,<x4- x3,y4- y3,z4- z3>)
#declare n4=vcross(<x4-nx7,y4-ny7,z4-nz7>,<x4-nx6,y4-ny6,z4-nz6>)
#declare normal4=n1+n2+n3+n4
//TRIANGLES
smooth_triangle {
    <x1, y1, z1 >, normal1,
    <x2, y2, z2 >, normal2,
    <x3, y3, z3 >, normal3
}

smooth_triangle {
    <x1, y1, z1 >, normal1,
    <x3, y3, z3 >, normal3,
    <x4, y4, z4 >, normal4
}

#if (tofile > 0)

#debug concat("smooth_triangle{<",
str(x1,0,-1),"",str(y1,0,-1),"",str(z1,0,-1),">,<",
str(normal1.x,0,-1),"",str(normal1.y,0,-1),"",str(normal1.z,0,-1),">,<",
str(x2,0,-1),"",str(y2,0,-1),"",str(z2,0,-1),">,<",
str(normal2.x,0,-1),"",str(normal2.y,0,-1),"",str(normal2.z,0,-1),">,<",
str(x3,0,-1),"",str(y3,0,-1),"",str(z3,0,-1),">,<",
str(normal3.x,0,-1),"",str(normal3.y,0,-1),"",str(normal3.z,0,-1),
">}", "\n")

#debug concat("smooth_triangle{<",
str(x1,0,-1),"",str(y1,0,-1),"",str(z1,0,-1),">,<",
str(normal1.x,0,-1),"",str(normal1.y,0,-1),"",str(normal1.z,0,-1),">,<",
str(x2,0,-1),"",str(y2,0,-1),"",str(z2,0,-1),">,<",
str(normal3.x,0,-1),"",str(normal3.y,0,-1),"",str(normal3.z,0,-1),">,<",

```

```

str(x3,0,-1),",",str(y3,0,-1),",",str(z3,0,-1),">,<",
str(normal4.x,0,-1),",",str(normal4.y,0,-1),",",str(normal4.z,0,-1),
">}", "\n")
#end

#declare uu = uu+iu
#end //inner loop
#if (tofile = 0)
#debug concat("Looping on ",str(counter,0,-1)," of ",str(viter,0,-1),"\n")
#end
#declare counter = counter + 1
#declare vv = vv+iv
#end //outer loop
} //mesh

```

2.3 「3DCGを描くときの3つのポイント」の説明

- 安定性が大事
- 特徴的な部分に注目
- 簡単なものに還元³

スライドショー「POV-Ray が教えてくれる人はみな Singularitist」

(<http://www.ne.jp/asahi/nishimura/takashi/POV-Ray/katachi.files/frame.htm>) を使って説明 .

2.4 一変数実関数の増減表とグラフの概形，一変数複素関数 $f_0(z) = z^2$ の写像としての様子

一変数可微分関数を調べる手段の一つとして「グラフの概形を描く」という方法があった . これは , たとえば $f(x) = ax(1-x)$ という二次関数に対し , 点 x の軌道 $x, f(x), f \circ f(x), f \circ f \circ f(x), \dots$ を考えたりするときにとても有効な方法となる (たとえば [デバニー] などをひもといてみると納得できるはず) . 高等学校数学 では , 「グラフの概形を描く」ために「増減表」というもの考えた . 次のようなものであった .

x	\dots	x_1		x_2		x_3		x_4	\dots
$f'(x)$	\dots	0	+	0	+	0	-	0	\dots
$f(x)$	\dots	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↗	$f(x_3)$	↘	$f(x_4)$	\dots

増減表の意味しているものは ,

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ は } x \text{ の近くで狭義単調増加}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ は } x \text{ の近くで狭義単調減少}$$

³反復関数系 (Iterated Function System) については [B] に詳しい解説がある . [バハ] は反復関数系を応用した画像圧縮技術の解説書であるが , ここにも簡潔な説明がある .

という事実から $f'(x) = 0$ となる x の近くでの関数 f の大雑把な挙動を知ることができるということである。すなわち、 $f'(x) = 0$ となる x においては、その近くでの f の大雑把な挙動を決めるには一見すると情報が足らなさそうだけれど (\mathbb{R} が 1 次元だということが幸いして) その近くでの f' の符号さえわかればうまくいく、ということである。

増減表の意味を考察していると、 $f'(x) = 0$ となる点 x は (その近くでの f の挙動が x における情報だけからだとわからなさそうという意味で) 関数 f にとって特別な点であることが理解できる。

次に一変数複素関数 $f_0(z) = z^2$ を考えてみる。複素変数 z の実部を x 、虚部を y とおく (すなわち $z = x + iy$ とおく) と、

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

となるので、 $w = f_0(z)$ を実部・虚部に分けてみると、 $f_0(z)$ は、

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$

という \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像と思える。この写像を改めて f_0 とおく。 f_0 のグラフは (抽象的に考えることはできるが、) 具体的に描くことはできない。 f_0 の挙動はわかりやすい。原点の挙動のみが例外的だが、原点の周りの様子も難しいものではない。

しかし、 f_0 の形を少しばかり変えてみるととたんに混乱してしまう。たとえば、

$$f_2(z) = z^2 + 2\bar{z}$$

を考えてみよう。 f_0 と同様 f_2 も実部・虚部に分けて \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への可微分写像と思う。定義域の同心円 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ を f_2 で写したらどうなるか考えてみる。 f_0 で写した場合の像は容易にわかるのに f_2 で写した場合の像はやはりわかりにくい感じがする。しかし、 r が十分大きければ f_2 はほとんど z^2 と思えるので、像は原点の周りを 2 回まわっている曲線となり、 r が十分小さければ f_2 はほとんど $2\bar{z}$ と思えるので、像は原点の周りを逆向きに 1 回まわっている曲線となる、はずである。

今日の宿題 2.1 では r を十分小さい値から十分大きい値に動かしてみると、像の曲線の概形はどのように移り変わっていくのであろうか？家で描いてみてください。

明日以降の目的は「可微分写像の特異点論」を使って $f_2(x, y) = (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$ の様子を調べることである。すなわち、水曜日・木曜日・金曜日で、上の宿題の解答を厳密な考察付きで与える。

3 水曜日の予定

3.1 逆関数の定理, 陰関数の定理

実数全体の集合 \mathbb{R} への写像を (実) 関数という。

n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の或る開集合 U で定義された関数

$$f(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in U$$

が変数 (x_1, \dots, x_n) に関して何回でも偏微分可能なとき, 関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を C^∞ 級関数, または可微分関数とよぶ.

n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の或る開集合 U から p 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^p への写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^p$ は p 個の関数の組

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

として表せる. このように表したときの各成分関数 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ が C^∞ 級関数のとき, 写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^p$ は C^∞ 級または可微分であるという.

定義 3.1 U, V を \mathbf{R}^n の開集合とする. 写像 $f: U \rightarrow V$ が 1 対 1 で上への対応で, $f: U \rightarrow V$ もその逆写像 $f^{-1}: V \rightarrow U$ も連続の時 f は同相写像とよばれる. さらに $f: U \rightarrow V$ もその逆写像 $f^{-1}: V \rightarrow U$ も可微分写像のとき, $f: U \rightarrow V$ は可微分同相写像とよばれる.

\mathbf{R}^n の或る開集合 U から \mathbf{R}^p への可微分写像

$$f: U \rightarrow \mathbf{R}^p, \quad f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

と点 $x \in U$ に対して行列

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1(x) & \partial f_1 / \partial x_2(x) & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n(x) \\ \partial f_2 / \partial x_1(x) & \partial f_2 / \partial x_2(x) & \cdots & \partial f_2 / \partial x_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_p / \partial x_1(x) & \partial f_p / \partial x_2(x) & \cdots & \partial f_p / \partial x_n(x) \end{pmatrix}$$

を写像 f の点 x におけるヤコビ行列という. 特に $n = p$ のとき, ヤコビ行列の行列式を写像 f の点 x におけるヤコビ行列式またはヤコビアンといい, 記号 $\det Jf(x)$ であらわす.

定理 3.1 (逆関数の定理) \mathbf{R}^n の或る開集合 U から同じ \mathbf{R}^n への可微分写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ の点 $p_0 \in U$ におけるヤコビアンが 0 でないとする: $\det Jf(p_0) \neq 0$. すると p_0 の開近傍 $V \subset U$ が存在して

- (1) $W = f(V)$ は $f(p_0)$ の開近傍となり,
 - (2) 制限写像 $f|_V: V \rightarrow W$ は可微分同相写像となる.
-

逆関数の定理は可微分多様体論や微分トポロジーにおいて最も基本的な定理である (たとえば, [松本], [佐佐泉佐] 第 部などでその様子を眺めることができる). 「... の基本定理」とよばれる多くの定理がそうであるように, その証明はとても長い. 証明に興味がある人は [松本] をご覧頂きたい. この種の定理は一度は自分で証明を理解することが必要であるが, それ以上に大事なものは, その定理を使えるようになることである. その典型的な使い方を陰関数の定理の証明でみてみよう.

定理 3.2 (陰関数の定理その 1) \mathbf{R}^{p+k} の原点 0 の或る開近傍 U から \mathbf{R}^p への可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ が $f(0) = 0$ であって点 $0 \in U$ におけるヤコビ行列の階数が p とする. そのとき, \mathbf{R}^{p+k} の原点 0 の開近傍 $V (\subset U)$ から同じ \mathbf{R}^{p+k} の原点 0 の開近傍 W への可微分同相写像 $h : V \rightarrow W$ が存在して

$$f_i(h(x_1, \dots, x_{p+k})) = x_i, \quad (i = 1, \dots, p)$$

となる.

陰関数の定理その 1 の証明は省略する, 佐伯先生の授業において証明付きで登場済みらしいので.

定理 3.3 (陰関数の定理その 2) \mathbf{R}^n の原点 0 の或る開近傍 U から \mathbf{R}^{n+k} への可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_{n+k}) : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ が $f(0) = 0$ であって点 $0 \in U$ におけるヤコビ行列の階数が n とする. そのとき \mathbf{R}^{n+k} の原点 0 の開近傍 V から同じ \mathbf{R}^{n+k} の原点 0 の開近傍 W への可微分同相写像 $h = (h_1, \dots, h_{n+k}) : V \rightarrow W$ が存在して

$$\begin{aligned} h_i(f(x_1, \dots, x_n)) &= x_i, & (i = 1, \dots, n) \\ h_i(f(x_1, \dots, x_n)) &= 0, & (i = n+1, \dots, n+k) \end{aligned}$$

となる.

[定理 3.3 の証明] $f = (f_1, \dots, f_{n+k}) : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ の点 $0 \in U$ におけるヤコビ行列の階数が n なので, 必要なら f の成分関数 f_1, \dots, f_{n+k} の順序を入れ替えて最初の n 個の関数の組のヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1(0) & \partial f_1 / \partial x_2(0) & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n(0) \\ \partial f_2 / \partial x_1(0) & \partial f_2 / \partial x_2(0) & \cdots & \partial f_2 / \partial x_n(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_n / \partial x_1(0) & \partial f_n / \partial x_2(0) & \cdots & \partial f_n / \partial x_n(0) \end{pmatrix}$$

が正則行列と仮定してよい. $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ に対して可微分写像 $F = (F_1, \dots, F_{n+k}) : U \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ を

$$\begin{aligned} F_i(x_1, \dots, x_{n+k}) &= f_i(x_1, \dots, x_n), & i = 1, \dots, n, \\ F_i(x_1, \dots, x_{n+k}) &= f_i(x_1, \dots, x_n) + x_i, & i = n+1, \dots, n+k \end{aligned}$$

で定義する. すると, F の原点 $0 \in \mathbf{R}^{n+k}$ におけるヤコビ行列 $JF(0)$ も正則行列である. したがって, 逆関数の定理より原点 $0 \in \mathbf{R}^{n+k}$ の近傍 W が存在して制限写像 $F|_W : W \rightarrow V = F(W)$ が可微分同相写像となる. $h = (F|_W)^{-1} : V \rightarrow W$ とおくと

$$\begin{aligned} h(f(x_1, \dots, x_n)) &= h(F(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)) \\ &= (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となるので, h が求める可微分同相写像である.

3.2 可微分写像の特異点，特異点の A -同値，特異点の安定性

一変数可微分関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ における $f'(x) \neq 0$ に相当する条件を可微分写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^p$ (U は \mathbf{R}^n の開集合) で探してみる．すると自然に「逆関数の定理」，「陰関数の定理」に到達する（証明できるかはともかくとして）．「逆関数の定理」，「陰関数の定理」を眺めていると次の定義は合点がいくはずである．

定義 3.2 U を \mathbf{R}^n の開集合とする．可微分写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^p$ に対して，点 $x \in U$ での f のヤコビ行列 $Jf(x)$ の階数が $\min(n, p)$ より小さいとき， x を f の特異点と呼ぶ．

昨日の f_0, f_2 の特異点達を調べてみる． $f_0(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ だったので，

$$Jf_0(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

であるので，特異点は原点 $(x, y) = (0, 0)$ のみである（そういえば，原点のまわりの挙動のみが異なっていた）． $f_2(x, y) = (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$ だったので，

$$Jf_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 2 & -2y \\ 2y & 2x - 2 \end{bmatrix}$$

であるので，特異点集合は単位円 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ となる．すなわち，同心円の半径 r を大きくしていくと，像が尖ってしまうなど，像の状況が激変する可能性があるのは $r = 1$ のみであることがこの段階でわかる⁴（みなさんの図ではどうなっているだろうか？）．

次に，特異点に対して同値関係を定義しよう．できるだけ自然な形で定義したい！「どうすればいいだろう」と暫く考えていると，

- 特異点ではない点（正則点と呼ばれる）に対しても平等に定義すべきであろう，
- 正則点に対しては逆関数の定理や陰関数の定理が成り立つのであった，
- 逆関数の定理や陰関数の定理の帰結の部分を定義に採用するととってもらしいのでは？

などという思いに至る．そこで，次の定義に自然に到達する．

定義 3.3 U を n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の開集合とする． f, g を U から p 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^p への可微分写像とする． x, y を U の点とする． x のまわりの f の挙動と y のまわりの g の挙動が A -同値（あるいは，右左同値）とは， x の近傍から y の近傍への可微分同相写像 s と， $f(x)$ の近傍から $g(y)$ の近傍への可微分同相写像 t が存在して， $t \circ f = g \circ s$ が成り立つことである．

ようするに逆関数の定理や陰関数の定理の帰結の部分を，特異点に対する場合も含めて定義に採用しただけである．

この部分節の最後に「安定特異点」というものを（粗く）定義しておく．「ちょっと動かしたぐらいでは変わらない」という感じの特異点を定義したいのである．「変わらない」の意味としては，「 A -

⁴内緒で本当のことを小声で話すと，実は少しばかりウソを言っていることになる．自己交差を持つ滑らかな曲線の自己交差の状況が変化してしまったとしても，この段階では判定できない．

同値」を採用すればよさそうであるが、「ちょっと動かす」の意味としては何を採用すればいいだろう？これも暫く考えていると、

- 定義域の点をちょっと動かすのは意味がなさそう
- 写像自体を写像空間内で動かす必要がある
- A -同値の定義のときと同様、正則点に対しても平等に定義すべきであろう、

という考えに至り、次の定義が自然に得られよう（ちょっと粗い定義なのだけれども）。

定義 3.4 U を \mathbb{R}^n の開集合、 x を U の点とし、 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ を可微分写像とする。 x において f が安定であるとは、 f の任意の可微分摂動 $f + \varphi_\varepsilon$ に対して x の近くの点 y が存在して、 x のまわりの f の挙動と y のまわりの $f + \varphi_\varepsilon$ の挙動が A -同値となるときに言う。

x が f の特異点であり、 x において f が安定であるとき、 x は f の安定特異点と呼ばれる。これで、昨日の3つのポイント「安定性が大事」、「特徴的な部分に注目」、「簡単なものに還元」のうち二つまで登場した。残る一つは次の部分節で登場する。

3.3 標準形

定義 3.5 (1) 対象の集合と同値関係が与えられているとする。そのとき、同値類別する行為のことを分類するとよぶ。

(2) 各同値類の元のうち最も簡単そうなものを標準形とよぶ。

標準形達のリストを分類結果と呼ぶことが通常。標準形は同値類の元のうちで最も簡単そうなものだから、「与えられた対象がこの標準形と同値になる」ということが示せれば、与えられた対象は「簡単なものに還元できた」と言える。大学生の間に学んだいろいろな標準形を思い出してみると、多くの場合、与えられた具体的な対象を標準形に還元できる具体的な方法（すなわち、アルゴリズム）があった（まずそれを教わっていた）。そして、その方法を使い標準形達のリストを求めていたと思う。

ところが、もう少し進んだ数学では、「与えられた具体的な対象を標準形に還元する具体的な方法があるわけではないが（なんか知らんけれども）分類は実行でき、標準形は求まる」という事態に遭遇する。そうするとどう困るかと言うと、「与えられた対象がリスト内のどれかの標準形と一致していることはわかる。でもどれと一致しているのか？」という問いに答えられないのである。「可微分写像の特異点論」においては、マザー理論の登場以後この問いは徐々に重要な問題として認められ始め、認識問題という名でよばれるようになった（1980年代前半あたりから）。認識問題やその解答については、談話会で概説する（水曜日の予定であるここでは「概説した」と書くべきかもしれないが）ことでもあり、この授業では一切触れないことにするが、興味のある人は[西福]の第 部第 10 章や [N] をご覧いただきたい。それらには認識問題に対する完全な解答が与えられている。その解答の証明は [N] にしか与えられていないが、高度な予備知識を必

要とするわけではなく、微積分と線形代数、そしてユークリッド空間の位相の知識があれば理解可能なはずである。

「安定特異点の分類」というものを明後日話す予定である。「安定特異点の分類」は標準形に還元できる具体的な方法があると言ってもよいであろう幸せな状況なのである。そして、幸せな状況であることを発見したのは Mather であり、彼の金字塔である「マザーの分類定理」(明日説明する予定)こそが幸せな状況に導くパスポートである。

今日の宿題 3.1 昨日の宿題で描いた図を変更する人は、変更した図を家で描いてみてください。

4 木曜日の予定

4.1 特異点の安定性の判定法

我々の写像 $f_2(x, y) = (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$ の特異点集合は既に知っている。単位円になるのであった。次に特異点の近くでの写像の様子を知りたいと思う。特異点安定であれば増減表に相当するツールがある程度用意されているらしいので、まず我々の写像の特異点安定特異点であるかどうかをチェックしたいと思う。

特異点の安定性を調べるにはどうすればいいだろうか？

この節ではこの問題を扱うが、まずは歴史の解説から始める。

Thom⁵ が、フィールズ賞を受賞⁶した頃「モース関数の理論の一般化」を建設しようと一生懸命になっていて、その中心的課題として「構造安定性問題」という問題を提出していた。構造安定性問題とは大雑把に説明すると次の問題⁷である。まず安定性という概念をグローバルに考える。 N を n 次元コンパクト可微分多様体、 P を p 次元可微分多様体として、 N から P への可微分写像全体の空間 $C^\infty(N, P)$ に自然に位相を入れておき、 $C^\infty(N, P)$ の元達に、昨日の A -同値をグローバルにした、自然な同値関係を考える。そうすると、「ちょっと摂動しても本質的な変化のない写像」の意味付けを厳密に行うことができ、この「ちょっと摂動しても本質的な変化のない写像」のことを安定写像と呼ぶ。たとえばモース関数や埋め込み写像は安定な写像であり、これらは写像空間全体の中で稠密に存在する。そこでトムは当初、「安定写像全体の集合は $C^\infty(N, P)$ の稠密部分集合であろう」と予想したらしい。しかし、ほどなくして稠密ではない例を自らみつけてしまったので、修正した問題を提出した。

安定写像全体の集合はいつ稠密となるのか？

この問題が構造安定性問題とよばれる問題である。モース関数の理論の写像化を行い可微分多様体の研究に応用したい、という意図が強く現れている問題である。

構造安定性問題は当時 20 代の若き Mather⁸ により完全に解決された。可微分多様体の次元対 (n, p) のみに依存することがまずわかり、ほどなくして、安定な可微分写像が稠密にあるような (n, p) も完全に決定された。1960 年代後半のことである。Thom が準備した解決のためのシナリオ

⁵1923 年生まれ。

⁶1958 年受賞。

⁷この問題を説明するためのみに、可微分多様体と可微分写像空間の位相を無定義で登場させる。可微分多様体に不慣れな人にはわかりにくいかもしれないが、その場合はこの問題の説明の箇所はとばして読んでほしい。また、より詳しく知りたい人は [西福] 第 6 章や [佐佐泉佐] 第 3 章を参照してほしい。

⁸1942 年生まれ。

に従って Mather は問題を局所的かつ有限次元の問題に帰着させて解決したのであるが、トムシナリオは極めて粗くその精密化と厳密な証明を必要としていたため、解決のためには Mather の登場を待たねばならなかった。それだけでも十分にすばらしいが、Mather の真骨頂はもっと別のところにある。「可微分写像芽の \mathcal{K} -同値」という重要な概念がトムのシナリオには欠けていたのである。この概念を導入する⁹ ことにより、Mather は構造安定性問題を一気に解決してしまうのであるが、それは

「可微分写像の特異点論」

という新しい分野の誕生の宣言でもあった。実際、その解決にあたり、Mather は実に多くのツールを作りだしており、それらは今日ではマザー理論と呼ばれ、可微分写像の特異点論では（もはやそれなしでは何もできないぐらいの）極めて重要な基礎理論となっている（マザー理論をきちんと勉強してみたい人は [西福] 第 I 部をご覧ください）。

「それほどまでに意味のある概念であれば、この集中講義で \mathcal{K} -同値を導入すればよからう」と思われるに違いない。しかし、 \mathcal{K} -同値の定義は比較的簡単だが、その意味するところを理解するのにある程度の知識と訓練が必要のように思える。また、この概念を導入し構造安定性問題を一気に解決する様を見せるには、結局のところ一冊の本を紹介することと同じであり、時間的にも内容の難度的にもこの授業で扱うには相応しくないものと考えられる。だから、この授業では \mathcal{K} -同値を導入しないことにする。そのかわり、 \mathcal{K} -同値の重要性が端的に現れている「マザーの分類定理」を、 \mathcal{K} -同値を導入することなく紹介して、マザー理論の威力の一端を垣間見ることにする。

さてこの部分節の主題である「特異点の安定性の判定法」であるが、これもマザー理論の一部なのである。使いやすい形で結果のみ述べておく。 U を \mathbf{R}^n の開集合、 $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ を可微分写像とする。

定理 4.1 f が点 $u \in U$ において安定であることの必要十分条件は、任意の p 次多項式関数 $\varphi_1, \varphi_p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ に対し多項式関数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_{11}, \dots, \beta_{pp} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ と実定数 $c_1, \dots, c_p \in \mathbf{R}$ が存在し、 $(p+1)$ 次以上の項を無視して（すなわち、 $\text{mod } (p+1)$ 次以上で）この部分節最後にある等式が u に十分近い任意の点 $x \in U$ において成立することである。

この定理は証明付きで [西福] に載っている（第 3 部第 3.3 節の条件 (d) (101 ページ)) ので興味のある人はご覧ください。

この判定法を用いると、我々の写像 f_2 は単位円上の任意の点で安定であることが示せる。しかし、残念ながら計算が多少煩雑になるのでここでは省略する。同様に計算は省略するが、以下を示すことは、我々の写像 f_2 に対しての計算に比べれば、はるかに容易である。

問題 4.1 (1) どんな可微分写像も正則点において安定である。

- (2) 多項式写像 $g_1(x, y) = (x, y^2)$ は原点において安定である（この特異点はホイットニーの折り目と呼ばれる）。
- (3) 多項式写像 $g_2(x, y) = (x, y^3 + xy)$ は原点において安定である（この特異点はホイットニーのくさびと呼ばれる）。

⁹Mather の一番弟子たる Damon 曰く、「Mather の素晴らしさは定義にある。なんだかよくわからない定義をパッと与え、いつのまにか問題を解決してしまう」。

- (4) 多項式写像 $g_3(x, y) = (x, y^2, xy)$ は原点において安定である (この特異点はホイットニーの傘と呼ばれる) .

定理 4.1 に登場する等式

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(x-u) \\ \vdots \\ \alpha_n(x-u) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \beta_{11}(x-u) & \cdots & \beta_{1p}(x-u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1}(x-u) & \cdots & \beta_{pp}(x-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(u) \\ \vdots \\ f_p(x) - f_p(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \\ \equiv & \begin{pmatrix} \varphi_1(x-u) \\ \vdots \\ \varphi_p(x-u) \end{pmatrix} \quad (\text{mod } (p+1) \text{ 次以上}) \end{aligned}$$

4.2 ジェット

U を \mathbf{R}^n の開集合とし, $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ を可微分関数とする. 非負整数 r に対し, 点 $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ における f の r 次までのテイラー展開

$$(*) \quad \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(u) (x-u)^\alpha$$

を考える. ただし, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^n$ に対し,

$$\begin{aligned} \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(u) &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(u) \\ (x-u)^\alpha &= (x_1 - u_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - u_n)^{\alpha_n} \end{aligned}$$

とおいている. (*) を f の点 u における r -ジェットといい,

$$j^r f(u)$$

と表記する.

可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_p): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ に対して

$$(j^r f_1(0), \dots, j^r f_p(0))$$

を f の原点における r -ジェットと言い, $j^r f(0)$ と表記する. また,

$$J^r(n, p) = \{j^r f(0) \mid f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p \text{ 可微分}\}$$

とおき, r -ジェット空間とよぶ. さらに,

$$J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times J^r(n, p)$$

とおく. $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ は有限次元のユークリッド空間である. 可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ に対して,

$$u \mapsto (u, f(u), j^r f(u))$$

という U から $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times J^r(n, p)$ への写像が考えられるが, この写像を

$$j^r f : U \rightarrow J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$$

と記し, f のジェット拡張とよぶ. 可微分写像のジェット拡張は, 当然, 可微分である.

以上は, r が有限の場合, すなわち有限ジェットの定義であるが, ときとして $r = \infty$ の場合を考えることもある. すなわち, 可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ に対して,

$$j^\infty f_i(u) = \text{点 } u \text{ における } f_i \text{ の無限次までのテイラー展開}$$

とおき, $j^\infty f(u) = (j^\infty f_1(u), \dots, j^\infty f_p(u))$ とおくのである. $j^\infty f(u)$ は収束べき級数とは限らず, 単なる形式的なべき級数かもしれないが気にしないことにする.

4.3 トムのジェット横断性定理の特別な形

この部分節ではトムのジェット横断性定理 (あるいは, トムの強横断性定理) というものの説明を行う. トムのジェット横断性定理は安定特異点の分類のために導入するのであるが, この目的のためにはトムのジェット横断性定理の特別な形で十分であるので (多様体論の言葉が不必要などの) わかりやすさを考慮して, ここでは特別な形のみを説明する. トムのジェット横断性定理の一般的な形やその証明に興味のある人は, [泉石] の 102-107 ページをご覧ください.

定理 4.2 (トムのジェット横断性定理の特別な形) S を $\dim J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p) - \dim S > n$ をみたす $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ のアフィン部分空間とする. すると, どんな可微分写像 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ (U は \mathbf{R}^n の開集合) に対しても,

$$j^r(f + \varphi_\varepsilon)(U) \cap S = \emptyset$$

をみたす可微分写像 $\varphi_\varepsilon : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ がいくらでも小さく取れる. すなわち (たとえ f のジェット拡張が S と交わっていても) f を微少摂動すればジェット拡張が S と交わらないようにできる.

4.4 実多元環

微分トポロジーを専攻している人にとっては代数学の話は興味が薄いかもしれない. しかし, 「可微分写像の特異点論」で必要とする代数学は加群と多元環の基礎的なことで事足りるのであり, ここに書かれていること以外で重要なことは「中山の補題」ぐらいである. しかも, 実多元環の計算にある程度慣れてくると「マザーの分類定理は標準系に還元するための具体的な方法なのだ」と

真に実感することができるので、実多元環はお勧めである。「中山の補題」も含めてこれらが簡潔にまとめられた良書としては [堀田] がある。

実数全体の集合は体であった。線形空間はアーベル群であり、さらにベクトルを実数倍するという演算があった。このようなことをアーベル群の可換環の元倍するということを考える。

定義 4.1 M をアーベル群, R を単位元 1 を持つ可換環とする. R の元 r と M の元 a の積 $ra \in M$ が定義されて次の条件 (1) - (4) を満たすとき, M を R -加群 (R -module) とよぶ.

$$(1) \quad r(a + b) = ra + rb,$$

$$(2) \quad (r + s)a = ra + sa,$$

$$(3) \quad (rs)a = r(sa),$$

$$(4) \quad 1a = a.$$

定義 4.2 A を環, R を単位元 1 を持つ可換環とする. A が R 加群であって, さらに次の条件 (5) を満たすとき, A を R -多元環 (R -algebra) という.

$$(5) \quad r(ab) = (ra)b = a(rb).$$

R -多元環を特に実多元環とよぶ.

例 実線形空間は R -加群である. 逆に R -加群は実線形空間である.

例 単位元 1 を持つ可換環 R のイデアル I は R -加群であり, さらに R -多元環である.

例 形式巾級数環 $\mathbf{R}[[X]]$ は実数全体のなす可換環 \mathbf{R} に対して R -多元環である.

例 U を \mathbf{R}^n の開集合とする. $C^\infty(U, \mathbf{R})$ は単位元 1 をもつ可換環であるし, R -加群でもある. さらに, 実多元環でもある. $C^\infty(U, \mathbf{R}^p)$ ($p \geq 2$) は R -加群であるし, $C^\infty(U, \mathbf{R})$ -加群でもある. しかし, $C^\infty(U, \mathbf{R})$ -多元環ではないし, 実多元環でもない.

定義 4.3 R -加群 M の部分群 S が R の同じ作用に関して R -加群になるとき, S は M の R -部分加群であるという. 同様に R -多元環 A の R -部分加群 S が R の同じ作用に関して R -多元環になるとき, S は A の R -部分多元環であるという.

例 単位元 1 を持つ可換環 R はそれ自身 R -多元環である. R のイデアル I は R の R -部分多元環である.

例 単位元 1 を持つ可換環 R のイデアル I に対して剰余環 R/I は R -多元環である. また, $I \subset R'$ なる R の部分環 R' に対して R'/I は R/I の R' -部分多元環である.

定義 4.4 R -加群 M の部分集合 S に対して S を含む最小の R -部分加群, すなわち S を含むすべての R -部分加群の共通集合を S で生成された M の R -部分加群とよぶ.

R -加群 M に対して, M の有限部分集合 $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ が存在して S で生成される R 部分加群が M 自身となるとき, M は有限生成 R -加群である, または M は R 上有限生成であるという. M が $\{a_1, \dots, a_k\}$ で生成される R -加群であるということを記号 $M = R\{a_1, \dots, a_k\}$ であらわす. また, このとき $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ を M の R -加群としての有限生成元とよぶ.

多元環に対しても, S で生成された R -部分多元環, 有限生成 R -多元環, R -多元環としての有限生成元などを同様に定義する. ただし, 多元環 A が R 上, 有限集合 $\{a_1, \dots, a_k\}$ で生成されることを, 有限生成元加群の場合と異なった記号

$$A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_R$$

で表す.

例 整数全体の集合 \mathbf{Z} はそれ自身 \mathbf{Z} -多元環であるが, 整数 m に対して, $m\mathbf{Z}$ は $m\mathbf{Z}$ は 1 個の元からなる有限集合 $\{m\}$ で生成される \mathbf{Z} の \mathbf{Z} -部分加群であり, \mathbf{Z} -部分多元環である:

$$m\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\{m\} = \langle m \rangle_{\mathbf{Z}}.$$

例 実数係数の 1 変数多項式環 $\mathbf{R}[X]$ のイデアル

$$I_0 = \{P(X) \in \mathbf{R}[X] \mid P(X) \text{ は定数項} = 0 \text{ の多項式}\}$$

は $\mathbf{R}[X]$ -多元環 $\mathbf{R}[X]$ の $\mathbf{R}[X]$ -部分加群であり $\mathbf{R}[X]$ -部分多元環でもある, 加群としても多元環としても $\mathbf{R}[X]$ 上単項式 $\{X\}$ で生成される.

$$I_0 = \mathbf{R}[X]\{X\} = \langle X \rangle_{\mathbf{R}[X]}.$$

今日の宿題 4.1 ホイットニーの折り目とホイットニーのくさびについて, それぞれ特異点の周りでの写像の様子を調べてください. そして, 明日扱う予定の定理 5.1 をちらりと眺めて, 我々の f_2 についての連日の図をさらに変更したくなったら変更した図を描いてください.

5 金曜日の予定

5.1 マザーの分類定理

U を \mathbf{R}^n における原点の開近傍とし, 可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ に対し, 原点のまわりでの挙動を考えるものとする.

$$Q(f) = \frac{\mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]}{\langle j^\infty f_1(0), \dots, j^\infty f_p(0) \rangle_{\mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]}}$$

とおく. $Q(f)$ は実多元環の構造を持つ. 次のマザーの分類定理により安定特異点のまわりにおける写像の様子という幾何的対象の幾何的分類が実多元環という代数的対象の代数的分類に帰着され

る。

定理 5.1 (マザーの分類定理) U を \mathbf{R}^n を原点の開近傍とし, 二つの可微分写像 $f, g: U \rightarrow \mathbf{R}^p$ はどちらも原点において安定であるとする. 以下は同値である.

- (1) 原点のまわりの f の挙動と g の挙動は A -同値.
- (2) $Q(f) \cong Q(g)$ (\mathbf{R} -多元環として同型)

マザーの分類定理はマザー理論の中でもっとも重要な定理の一つだとみなせるが, その威力を実感するには, 安定特異点の分類を実行してみるのが一番良い. 実行するには「トムのジェット横断性定理」も必要である.

マザーの分類定理に対する Mather が与えた証明はややこしく見通しもよくないものであったが, 後に Martinet により普遍開折の理論を用いた簡潔な証明が与えられた. マザーの分類定理がマザー理論の中で縦横無尽に使われる様を眺めたい人は [西福] の第 I 部第 4, 7, 8 章を, マザーの分類定理の証明を見たい人は [西福] 第 I 部第 9 章をご覧ください.

5.2 平面写像の安定特異点の分類

マザー理論の副産物として, いくつかの安定特異点の分類も Mather は得ている. しかし, Mather は (n, p) が結構領域¹⁰のときに登場する安定特異点すべてを分類しているわけではない. (n, p) が結構領域の場合に登場する安定特異点の分類を完成させたのは Damon であった. 1970 年代半ばのことである. 完全に分類できれば分類表からいろいろなことがわかる. たとえば, 「結構領域における安定特異点が位相的に A -同値であれば, 実は A -同値でなくてはならない」¹¹ という意外な結果も Damon によって得られた. Damon はこの結果を得るために分類を完成させた, と言える. 分類しきるといことは多くの副産物を産みととも意義のあることであるが, 膨大なりストになるのが難である.

以下では, 比較的扱いやすく, この集中講義の目的に沿っていると思える $(n, p) = (2, 2)$ の場合に Mather の方法で分類を実行してみる. Mather や Damon が行った分類も基本的には同じ方法で行われている.

定理 5.2 平面から平面への可微分写像の安定特異点は以下の二つのいずれかに A -同値.

- (a) $(x, y) \mapsto (x, y^2)$ (ホイットニーの折り目)
- (b) $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$ (ホイットニーのくさび)

[定理 5.1 の証明] U を原点 $0 \in \mathbf{R}^2$ の開近傍とする. また, $f: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ を可微分写像とし, 原点は f の安定特異点であるとする. 定理 4.2 (トムのジェット横断性定理の特別な形) より, f の原点におけるヤコビ行列の階数は 2 または 1 でなければならないことがわかる.

ヤコビ行列の階数が 2 の場合 逆関数の定理より, 原点は f の正則点である.

ヤコビ行列の階数が 1 の場合 必要であれば適当な可微分座標変換を施すことにより, 原点の

¹⁰構造安定性問題が肯定的に解決される次元対のこと. $(n, p) = (n, 1), (n, 2), (n, 3), (n, 2n)$ 以上) などは結構領域内の次元対である.

¹¹結構領域における安定特異点に対する剛性定理.

近くでは f は

$$f(x, y) = (x, f_2(x, y))$$

という形をしていると仮定してもかまわない． f の原点におけるヤコビ行列の階数が 1 なので， $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0) = 0$ となっていることに注意．

$$\begin{aligned} Q(f) &= \frac{\mathcal{E}_2}{\langle f \rangle_{\mathcal{E}_2}} \\ &= \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x, f_2(x, y) \rangle_{\mathcal{E}_2}} \\ &\cong \frac{\mathcal{E}_1}{\langle f_2(0, y) \rangle_{\mathcal{E}_1}} \end{aligned}$$

を得る．

$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(0) \neq 0$ の場合は，

$$Q(f) \cong \frac{\mathcal{E}_1}{\langle f_2(0, y) \rangle_{\mathcal{E}_1}} \cong \frac{\mathcal{E}_1}{\langle y^2 \rangle_{\mathcal{E}_1}} \cong \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x, y^2 \rangle_{\mathcal{E}_2}}$$

となるが，可微分写像

$$(x, y) \mapsto (x, y^2)$$

の原点はホイットニーの折り目という安定特異点であった（問題 4.1）ので，マザーの分類定理より f はホイットニーの折り目と \mathcal{A} -同値となる．

$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(0) = 0$ の場合は，トムの強横断性定理より $\frac{\partial^3 f_2}{\partial y^3}(0) \neq 0$ でなければならない．すると，

$$Q(f) \cong \frac{\mathcal{E}_1}{\langle f_2(0, y) \rangle_{\mathcal{E}_1}} \cong \frac{\mathcal{E}_1}{\langle y^3 \rangle_{\mathcal{E}_1}} \cong \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x, y^3 + xy \rangle_{\mathcal{E}_2}}$$

となり，可微分写像

$$(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$$

の原点はホイットニーのくさびという安定特異点であった（問題 4.1）ので，マザーの分類定理より f はホイットニーのくさびと \mathcal{A} -同値となる．

5.3 ホイットニーのくさびの数

ここまででかなり様子が分かってきたと言える． f_2 の特異点集合は単位円なのだから，逆関数の定理により単位円以外の同心円は滑らかに写されているはずである．同心円の半径が小さいときは逆向きに 1 周するように写っていたのが同心円の半径を大きくすると同じ向きに 2 周するように写るようになる原因は特異点集合である単位円にあるはずだ．そこで単位円の像がどうなっているか，単位円の周りでどのように写るのかを調べれば全貌が把握できるに違いない．単位円上の各点は f_2 の安定特異点であり，それらはホイットニーの折り目かホイットニーのくさびに限ることもわかっている．さらに，どちらの安定特異点の周りの写像の様子も既に調べている．さてこれだけの情報から，我々の写像 f_2 に対して同心円の像たちの成長の様子を説明できるであろうか？

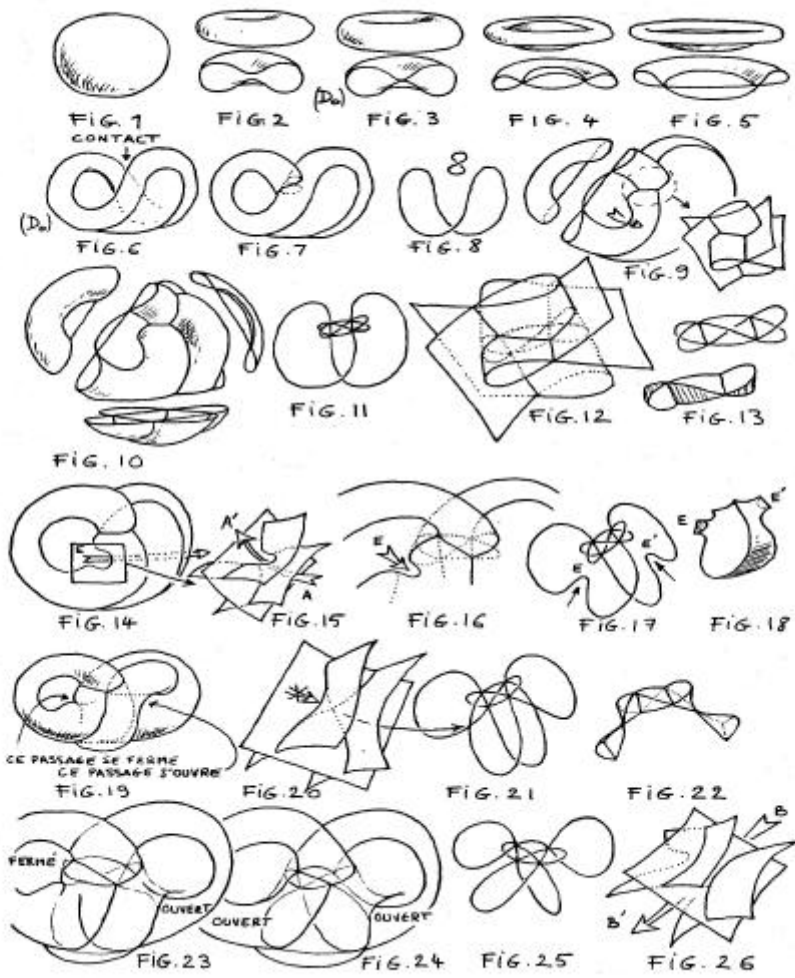
5.4 数学のアニメーション

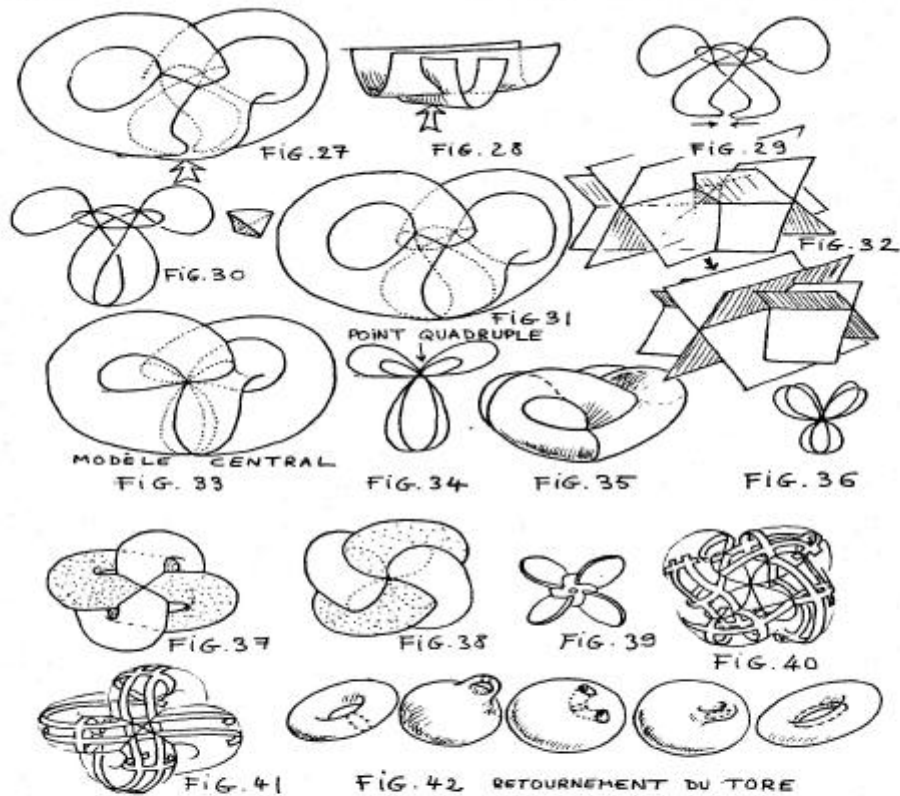
「球面を裏返すビデオ」を見たことがある人も多いであろう（もしかしたら全員か？）。裏返しの途中のどの時刻においても特異点無しの写像（はめ込みと呼ばれる）の像になっている，という条件¹²を満たして裏返すことを実践しているビデオのことである。私が知る限り，「球面を裏返すビデオ」は2種類ある。一つは「Turning a sphere inside out」というタイトルで Nelson Max によって作られたものである。これは，Bernard Morin の変形方法¹³をビデオで実現したものであり，1970年代に作られた。もう一つは「Outside In」というタイトルでミネソタ大学にある Geometry Center によって作られており，Williams Thurston による「球面を波立たせる」というアイデアに基づいていて，とても綺麗なアニメーションに仕上がっている。

時間はある程度かかってもいいので，できるだけお金をかけず普通のパソコンとフリーソフトを使って数学のアニメーションを作ってみたいと思う。Nelson Max にしても Geometry Center にしても膨大な金額をかけた大規模プロジェクトであつたらしいので，これらの真似はとてもできない。でも諦めるのは早い。IRTC のアニメーション部門の提出作品にはちゃちいマシンを使って作成しているものの，なかなかの出来映えのものもある。私の研究室では，3年生達がチームで数学のアニメーション作りにとりかかりつつある。アニメーションに限らずなんでもそうだが，一番重要なのはテクニックをマスターすることではなく，コンテンツ（すなわち「これを作ろう」と思う「これ」の部分）である。良いコンテンツを探る一助としてみなさんからもアイデアを募集したい。「これだ！」というものを思いついた人はレポート問題の問 15 を是非選び，書いていただきたい。「これは素晴らしい」と思うアイデアが現れた場合は，そのアイデアに基づいたアニメーションを私の研究室の学生に作成させるつもりです。そのアイデア提供者には，後日アニメーションが出来上がった段階で，アニメーション (mpg ファイル) をお送りしたいと思います（アニメーション作成には時間がかかるので気長に待っててください）。

¹²このような条件をみたすホモトピーは正則ホモトピーと呼ばれる

¹³Bernard Morin と Jean-Pierre Petit の論文 [MP] において，次ページとそのまた次のページのような手書きの図で説明されている。





Deux modifications (D_1) vont alors intervenir, et c'est la partie la plus délicate à représenter. On a cherché à mettre en évidence à l'aide des figures 14 et 15 les nappes qui vont être intéressées par l'un des (D_1). On reconnaît la surface PH et le plan mobile évoqués dans la Note (¹). Le second (D_1) est masqué par le modèle. On ferait apparaître la zone en question par simple rotation de 180° . Sur les figures 14 et 17 le changement de structure de la courbe de self-intersection est ébauché (flèches). Sur la figure 14 une flèche blanche évoque un passage qui existe à ce stade à travers le modèle. Si l'on coulait du plâtre dans la cavité on obtiendrait la figure 18. Cette cavité communiquant avec l'extérieur par les « entrées » E et E'.

参考文献

- [B] M. F. Barnsley, “Fractals Everywhere”, second edition, Academic Press, 1993.
- [バハ] M. F. バーンズレイ, L. P. ハード, 『マルチメディアフラクタル画像圧縮』, 蔡東生・江守正多訳, 数理科学シリーズ 4, A K ピーターズ・トッパン, 1995 .
- [CG-ARTS] CG-ARTS 協会, 『平成 1 2 年度版 マルチメディア検定 2 級問題集』, CG-ARTS 協会, 2000 .
- [CLO] D. Cox, J. Little and D. O’shea, “Ideals , Varieties, and Algorithms”, second edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1996.
- [デバニー] R. L. デバニー, 『カオス力学系』, 第二版, 後藤憲一訳, 共立出版, 1996 .
- [技術編] 技術編 CG 標準テキストブック編集委員会, 『技術編 C G 標準テキストブック』, CG-ARTS 協会, 1999 .
- [裕] 裕 文夫, 『理工系の基礎数学』, 培風館, 2001 .
- [堀田] 堀田良之, 『代数入門 - 群と加群』, 裳華房, 1987.
- [泉石] 泉屋周一・石川剛郎, 『応用特異点論』, 共立出版, 1998 .
- [小室 1] 小室日出樹, 『POV-Ray で始めるレイトレーシング』, アスキー出版, 1999 .
- [小室 2] 小室日出樹, 『POV-Ray で学ぶ実習コンピュータグラフィックス』, アスキー出版, 2000 .
- [松本] 松本幸夫, 『多様体の基礎』, 基礎数学 5, 東京大学出版会, 1988.
- [MP] Bernard Morin and Jean-Pierre Petit, “Le retournement de la sphère”, C. R. Acad. Sc. Paris, **287**(1978), 791-794.
- [N] T. Nishimura, “Criteria for right-left equivalence of smooth map-germs”, Topology, **40**(2001), 433-462.
- [西福] 西村尚史・福田拓生, 『特異点と分岐』, 特異点の数理第 2 巻, 共立出版, 2002 年 1 月出版予定 .
- [佐佐泉佐] 佐伯 修・佐久間一浩・泉屋周一・佐野貴志, 『幾何学と特異点』, 特異点の数理第 1 巻, 共立出版, 2001 .
- [笹沢] 笹沢教一, 『恐竜が動き出す - デジタル古生物入門』, 中公新書ラクレ 14, 中央公論新社, 2001 .

レポート問題

以下の中から，二つ以上選んで答えて下さい．締め切りは1月15日（火）．数学教室の事務室に提出してください．

- 問 1 「POV-Ray バージョン 3.1 ドキュメンテーションの和訳 (<http://mmcs.ed.ynu.ac.jp/nishimulabo/japanese/POVUSER.HTM>)」をよく見て，修正すべき点を2点以上見つけなさい．
- 問 2 swallowtail(<http://www.uib.no/People/nfytn/stlgif.htm> 参照) の定義方程式を見つけてください（代数方程式であること，すなわち，多項式 = 0 という形であること）．
- 問 3 「種数 2 の閉曲面（二人乗りの浮き輪）」のパラメトリック表示が定義方程式を見つけてください（滑らかであること，初等関数のみで表されていること）．
- 問 4 数学において「安定性」という概念が導入されている具体例をあげ，詳しく説明しなさい（授業中にあげた例を除く）．
- 問 5 数学において「特徴的な部分に注目する」という方法を実践している具体例をあげ，詳しく説明しなさい（授業中にあげた例を除く）．
- 問 6 数学において「簡単なものに還元する」という方法を実践している具体例をあげ，詳しく説明しなさい（授業中にあげた例を除く）．
- 問 7 写像 $t \mapsto (t^2, t^3, t^4)$ の像は空間曲線となる．この曲線の各点に接線を描いてゆくと、接線達の和集合で曲面ができる．この曲面の図を描きなさい．
- 問 8 「安定特異点」を厳密に定義しなさい．
- 問 9 問題 4.1 を解きなさい．
- 問 10 可微分写像 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の安定特異点の標準形を「トムのジェット横断性定理」と「マザーの分類定理」から求めなさい．
- 問 11 写像 $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y, x^2 + y^2)$ の像の図を描きなさい．
- 問 12 複素関数 $z \rightarrow z^n + n\bar{z}$ ($n \geq 3$) を実写像と思う．その特異点集合は単位円になることを示しなさい．
- 問 13 複素関数 $z \rightarrow z^n + n\bar{z}$ ($n \geq 3$) を実写像と思い，その特異点が安定であることを示せたとする（実際に示せる）．そのとき，ホイットニーのくさびと A -同値である特異点をすべて求めなさい．
- 問 14 複素関数 $z \rightarrow z^n + n\bar{z}$ ($n \geq 3$) を実写像と思い，その特異点が安定であることを示せたとする（実際に示せる）．そのとき、その写像の写像としての様子を調べなさい．
- 問 15 作る価値があるとあなたが思う「数学のアニメーション」とはどのような内容のものか．これまでに存在しない斬新なものであって，それを実現すれば多くの人が「オオッ！」と驚くようなものであり，1-2 分程度のアニメーションが望ましい．

この集中講義の感想を書いてくれる人は感想も付記してください．