カオス・フラクタルA試験問題の解答例

平成 12 年 7 月 23 日

問題１

1. （各１５点）　複素平面上で考えることにする。

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z + 1 \\
&= \frac{1}{2}i(x - iy) + 1 \\
&= \frac{1}{2}(y + ix) + 1 \\
&= (\frac{1}{2}y + 1) + \frac{1}{2}xi
\end{aligned}
$$

なので、同次座標を用いて f_1 を表すと

$$
f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}
$$

となる。f_2 については、

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{2}e^{\pi i}z + (8 + 3i) \\
&= -\frac{1}{2}(x + iy) + (8 + 3i) \\
&= (-\frac{1}{2}x + 8) + (-\frac{1}{2}y + 3)i
\end{aligned}
$$

なので、同次座標を用いて表すと

$$
f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}
$$

となる。

同次座標表現を用いなくとも、同じ意味の式が書いてあれば○。

2.（１５点）

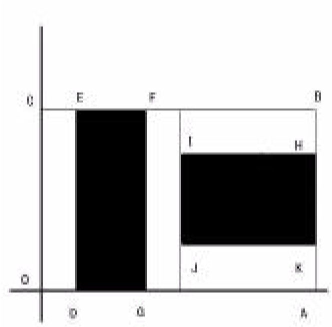

図 1: R_2 の図

3.（１５点）

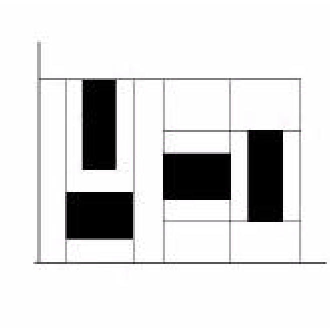

図 2: R_3 の図

4.（１５点） R は $\{f_1; f_2\}$ に関する自己相似集合であること、すなわち、

$$R = f_1(R) \cup f_2(R)$$

が成立することを示す。

<u>（イ） $R \subset f_1(R) \cup f_2(R)$ について。</u> $\forall x \in f_1(R) \cup f_2(R)$ に対し、$x \in f_1(R)$ または $x \in f_2(R)$ である。

仮に、$x \in f_1(R)$ であるとすると、$f_1^{-1}(x) \in R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$。よって、

$$f_1^{-1}(x) \in R_n \quad (\forall n \in N)$$

となる。これより、

$$x \in f_1(R_n) \subset f_1(R_n) \cup f_2(R_n) \quad (\forall n \in N)$$

を得、$R_{n+1} = f_1(R_n) \cup f_2(R_n)$ とおいたのだから、

$$x \in R_{n+1} \quad (\forall n \in N)$$

を得ることになる。これだけでは、$x \in R_1$ かどうかはわからないが、$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset R_4 \cdots$ なので、$x \in R_1$ も成り立つことがわかる。結局、

$$x \in R_n \quad (\forall n \in N)$$

すなわち

$$x \in \bigcap_{n=1} R_n = R$$

となり、

$$f_1(R) \subset R$$

が成立することがわかる。
仮に $x \in f_2(R)$ であるとしても、（f_1 を f_2 に変えるだけの）同様の議論で

$$f_2(R) \subset R$$

が成立することがわかる。
以上より、

$$R \supset f_1(R) \cup f_2(R)$$

が示せた。

<u>（ロ） $R \subset f_1(R) \cup f_2(R)$ について。</u> $\forall x \in R$ に対し、$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ であるから、

$$x \in R_n \quad (\forall n \in N)$$

である。$R_{n+1} = f_1(R_n) \bigcup f_2(R_n)$ とおいているので、

$$x \in f_1(R_n) \bigcup f_2(R_n) \quad (\forall n \in N)$$

となり、

$$(*) \qquad f_1^{-1}(x) \in R_n \text{ or } f_2^{-1}(x) \in R_n \quad (\forall n \in N)$$

を得る。わかりやすく書き下してみると、

$$\begin{array}{lllll}
(f_1^{-1}(x) \in R_1 & \text{or} & f_2^{-1}(x) \in R_1) & \text{and} \\
(f_1^{-1}(x) \in R_2 & \text{or} & f_2^{-1}(x) \in R_2) & \text{and} \\
(f_1^{-1}(x) \in R_3 & \text{or} & f_2^{-1}(x) \in R_3) & \text{and} \\
(f_1^{-1}(x) \in R_4 & \text{or} & f_2^{-1}(x) \in R_4) & \text{and} \\
 & \cdots \quad \cdots \quad \cdots & &
\end{array}$$

となっているわけである。これから、

$$(**) \qquad f_1^{-1}(x) \in \bigcap_{n=1} R_n = R \text{ or } f_2^{-1}(x) \in \bigcap_{n=1} R_n = R$$

を得る、というのは一般には正しくないが、この問題の状況においては正しい。（＊＊）から

$$x \in f_1(R) \text{ or } x \in f_2(R)$$

がわかり、これはすなわち

$$x \in f_1(R) \bigcup f_2(R)$$

であるから

$$R \subset f_1(R) \bigcup f_2(R)$$

が示せたことになる。

後は（＊＊）が成り立つことを示せば終わり。背理法で示す。（＊＊）が成り立たないと仮定すると、

(1) $$\exists p \in \mathbb{N} \text{ such that } f_1^{-1}(x) \notin R_p$$

と

(2) $$\exists q \in \mathbb{N} \text{ such that } f_2^{-1}(x) \notin R_q$$

の両方が成立していることになる。$\max(p; q) = n$ とおく。この問題の状況においては、

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset R_4 \cdots$$

となっているので、（１）、（２）より

$$f_1^{-1}(x) \notin R_n \text{ and } f_2^{-1}(x) \notin R_n$$

を得る。これは（＊）に矛盾していますね。従って、（＊＊）が成り立たないとした仮定は間違いっていて、（＊＊）は正しいことがわかる。

5. （１５点）　$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \cdots$ であるから、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n &= R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n \\ &= R_1 \end{aligned}$$

となる。これが１以上の任意の n に対して言えるので、

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \bigcap_{n=1} \tilde{R}_n \\ &= R_1 \end{aligned}$$

となる。

$$f_1(R_1) \cup f_2(R_1)$$

の図は２番で描いており、これは R_1 と異なるので、

$$\tilde{R} = f_1(\tilde{R}) \cup f_2(\tilde{R})$$

は成立しない。すなわち、$\tilde{R}$ は $\{f_1; f_2\}$ に関する自己相似集合ではない。

問題２

1. （１５点）　ほとんどの人がよくできていました。図を書いて考えてもできるし、「３は２進法では１１だから、１÷１１を２進法表示で実行」してもいいですね。答えは、

$$\underline{0.010101\cdots_{(2進法)}},\qquad \underline{0.1111\cdots_{(4進法)}},$$

となります。

2. （１５点）　I_2 の図は、３番において I_1, I_3 の図とともに描くことにします。
3. （１５点）

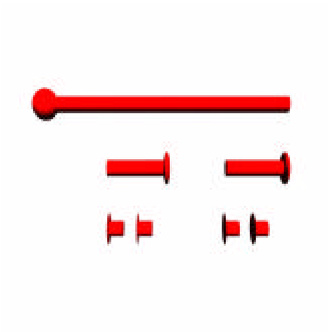

図 3: I_1, I_2, I_3 の図

4. （１５点）　２番、３番（特に３番が）が正しくできていると、この４番にも正しく答えられるでしょう。正解だった人が数人いました。

　F に属する数を４進法で表すと、小数点以下第１位が１又は３となることが I_2 からわかるし、、小数点以下第２位が０又は２であることが I_3 からわかります。ここまでわかると、h_1, h_2 の x の係数が負であることがポイントとなり、I_n の添え字 n が奇数のときと偶数のときとで様子が異なってくることも比較的容易にわかります。

　答えは、

$$F = \{0.a_1a_2a_3\cdots_{(4進法)} \mid a_{2n-1} = 1 \text{ or } 3,\ a_{2n} = 0 \text{ or } 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})\}$$

となります。表記の仕方が違っても意味が同じであれば○。