応用解析学I試験問題

１９９９年9月２８日

問題１　　平面 $\mathbf{R}^2$ 上の３つの写像

$$
\begin{aligned}
f_1(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\
f_2(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4} \\ -\sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\
f_3(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

を考える。f_1, f_2, f_3 はいずれも縮小係数 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ の縮小写像である。

$$T_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

とおく。以下に答えよ。

1. $T_1 = f_1(T_0) \cup f_2(T_0) \cup f_3(T_0)$ とおく。T_1 を図示せよ。
2. $T_2 = f_1(T_1) \cup f_2(T_1) \cup f_3(T_1)$ とおく。T_2 を図示せよ。
3. T は $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する自己相似集合であろうか？詳しく理由をつけて答えよ。
4. T' は $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する自己相似集合であろうか？詳しく理由をつけて答えよ。

但し、

$$T_{n+1} = f_1(T_n) \bigcup f_2(T_n) \cup f_3(T_n) \quad (n \ge 0)$$

とし、

$$T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n,\ T' = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$$

とおいている。

問題２　　授業で扱った「スギの葉」の例（参考資料を参照）について、以下に答えよ。

1. 第 n 段階の図形 L_n は、2^n 個の小三角形の集合になっていることを示せ。
2. 1 の 2^n 個の小三角形はそれぞれ相似比が

$$(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{\sqrt{3}})^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

の三角形 ${}_nC_i$ 個　$(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ からなることを示せ。

問題３

1.
$$\frac{1}{2}$$
を３進法で表すといくつになるか？また、５進法で表すといくつになるか？

2.
$$\begin{aligned} I_0 &= [0,1] \\ h_1(x) = \frac{1}{5}x,\ h_2(x) &= \frac{1}{5}x + \frac{2}{5},\ h_3(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} \end{aligned}$$
に対し、
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= h_1(I_n) \cup h_2(I_n) \cup h_3(I_n) \quad (n \geq 0) \\ \mathcal{F} &= \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \end{aligned}$$
とおく。$\mathcal{F}$ は５進法で表したときのどんな数の集合と一致しているか？詳しく説明せよ。

3. 上の $\mathcal{F}$ は $\{h_1, h_2, h_3\}$ に関する自己相似集合であろうか？詳しく理由をつけて答えよ。