

応用解析学I 試験問題

1998年10月29日

問題1 平面 \mathbf{R}^2 上の3つの写像

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を考える。 f_1, f_2, f_3 はいずれも縮小係数 0.5 の縮小写像である。

$$T_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -0.1 \leq y \leq 0.1\}$$

とおく。以下に答えよ。

1. $T_1 = f_1(T_0) \cup f_2(T_0) \cup f_3(T_0) \cup T_0$ とおく。 T_1 を図示せよ。
2. $T_2 = f_1(T_1) \cup f_2(T_1) \cup f_3(T_1) \cup T_1$ とおく。 T_2 を図示せよ。
3. $T_3 = f_1(T_2) \cup f_2(T_2) \cup f_3(T_2) \cup T_2$ とおく。 T_3 を図示せよ。
4. T は $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する自己相似集合であろうか？理由をつけて答えよ。
5. T は $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する内部自己相似集合であろうか？理由をつけて答えよ。
6. T' は $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する自己相似集合であろうか？理由をつけて答えよ。
7. T' は $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する内部自己相似集合であろうか？理由をつけて答えよ。

但し、

$$T_{n+1} = f_1(T_n) \cup f_2(T_n) \cup f_3(T_n) \cup T_n \quad (n \geq 0)$$

とし、

$$T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n, \quad T' = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$$

とおいている。

問題2 教科書38ページから44ページの「スギの葉」の例について、以下に答えよ。

- 第 n 段階の図形 L_n は、 2^n 個の小三角形の集合になっていることを示せ。
- 1 の 2^n 個の小三角形はそれぞれ相似比が

$$\left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

の三角形 ${}_n C_i$ 個 $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ からなることを示せ。

3.

$$V(n) = \frac{L_{n+1} \text{の面積}}{L_n \text{の面積}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を求めよ。

問題 3

- 10 進法で表すと

0.123456790123456790123456790... (123456790 の部分が繰り返される)

となる数は 3 進法で表すといくつになるか？

- 教科書 14 ページから 22 ページの「カントールの 3 進集合」 C は、3 進法で表したときのどんな数の集合と一致しているか？詳しく説明せよ。
- 「カントールの 3 進集合」 C は次の性質を持っていることを示せ。

$$\forall x \in C, \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C \text{ such that}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{and} \quad x_n \neq x \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$