

応用解析学II 試験問題

1997年2月3日

問題1 $(\mathbf{R}^2, \text{ユークリッド})$ において

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$$

とおく。

$h(A, B)$, $h(B, C)$, $h(C, A)$ をそれぞれ求めなさい。

問題2 $(\mathbf{R}^2, \text{ユークリッド})$ において次の3つのアフィン変換

$$w_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

を考える。 w_1, w_2, w_3 はいずれも縮小係数 0.5 の縮小写像である。

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y, y - x \leq 5\}$$

とおく。以下に答えなさい。

(1) T を図示しなさい。

(2) $W(T) = w_1(T) \cup w_2(T) \cup w_3(T)$ を図示しなさい。

(3) $W^{\circ 2}(T) = w_1(W(T)) \cup w_2(W(T)) \cup w_3(W(T))$ を図示しなさい。

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(T)$$

はどのような図形になるであろうか？

(5) 凝集変換

$$w_0 : \mathcal{H}(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$$

を

$$w_0(B) = T \quad \text{for } \forall B \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$$

で定め、変換

$$\widetilde{W} : \mathcal{H}(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$$

を

$$\widetilde{W}(B) = w_0(B) \cup w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B) \quad \text{for } \forall B \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$$

で定める。 $\widetilde{W}(T)$ を図示しなさい。

(6) (5) の \widetilde{W} に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{W}^{\circ n}(T)$$

はどのような図形になるであろうか？