予想を装う問題集

平成 12 年 1 月 26 日

（これらの問題のうちのいずれかと同じ、または、酷似した問題が期末試験に出題される気がする）

1. 指数関数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

に対し、次を示せ。

(a) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \in \mathbf{R})$

(b) $(e^z)' = e^z \quad (z \in \mathbf{C})$

(c) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2n\pi i \quad (n \in \mathbf{Z})$

2. 次の等式を示せ。

(a) $(\cos z)' = -\sin z$

(b) $(\sin z)' = \cos z$

(c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(d) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(e) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(f) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

3. 次の値を求めよ。

(a) $\mathrm{Log}\, i$

(b) i^i　主値

(c) $\sin(i\pi)$

(d)

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$$

(e)

$$\lim_{-\pi<\arg z<\pi,\ z\to 0} z\mathrm{Log}\, z$$

4. 次の方程式を解け。

(a) $e^z = i$

(b) $\sin z = 0$

(c) $\cos z = i$

5. 次の不等式を示せ。

$$|e^z| \le e^{|z|}$$

6. 次の集合を図示せよ。

(a) $\{z \in \mathbf{C} \mid |e^{-z}| < 1\}$

(b) $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le \pi,\ |\cos z| \le 1\}$

7. z 平面内の実軸、虚軸に平行な $y = y_0,\ x = x_0$ は、写像 $w = \frac{1}{z}$ によって、円に写ることを示せ。
8. 写像 $w = \mathrm{e}^x$ の様子を調べよ。
9. 写像 $w = \frac{1}{z}$ の様子を調べよ。
10. 写像 $w = \sin z$ の様子を調べよ。
11. 複素関数 $f(z) = (\sqrt{3} + i)\overline{z}$ に対応する行列を求めよ。
12. 行列

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

に対応する複素関数を求めよ。

13. 次の複素関数の複素微分可能性を調べよ。

(a) $f(z) = \overline{z}$

(b) $f(z) = \overline{z}^3$

(c) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$

(d) $f(z) = |z|^2$

14. 以下の複素関数 $f(z)$ に対し、その導関数 $f'(z)$ を定義に従って求めよ。

(a) $f(z) = z^2$

(b) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$　　(ただし $z = x + iy$)

15. 正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$　$(z = x + iy)$ に対し次の等式を示せ。

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

16. 正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$　　(ただし $z = x + iy$) に対し、

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

となることを示せ。

17. 次を示せ。

(a) コーシー・リーマン方程式を極形式で表すと

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)$$

となる。

(b) 正則関数 $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ を極形式で表すと

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + i\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)) = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{ir}(\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) + i\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta))$$

となる。

18. 複素関数 $f(z)$ が点 $z = z_0$ で正則ならば、

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

で定義される複素関数 $g(z)$ は点 $z = \overline{z_0}$ で正則であることを示せ。

19. 正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$　(ただし $z = x + iy$) に対し次を示せ。

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

(b)

$$g(z) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)) + i(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y))$$

は正則関数。