非線形数理II：予想を装う問題集の解答やヒント

平成13年2月1日

指摘されて、間違いがあることがわかりました。1の（b）、8の（a）、8の（c）の答えがほんのちょっとだけ間違っていました。訂正した解答を載せておきます。

授業中に既にやっていたりしているものについては省略してある。

1.

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha+\sin\beta & \sin\alpha-\cos\beta \\ -\sin\alpha-\cos\beta & \cos\alpha-\sin\beta \end{bmatrix}$$

2. 途中までだったりヒントだったり …。

(a) $\alpha z = (a+ib)(x+iy) = ax - by + i(bx+ay)$

(b) $(\alpha_1+\alpha_2)z = [(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)](x+iy)$

(c) $(\alpha_1\alpha_2)z = \alpha_1(\alpha_2 z)$

3. $\log\bar{z} = \log|\bar{z}| + i\arg(\bar{z})$ がヒントといえばヒント …。

7.

(d) 複素微分の定義に戻って考えると …。

(e) こいつあちょっと難しい。少し丁寧にヒントを書くことにしましょう。$\log z = w = u + iv$ とおく。

$$\begin{aligned}
|z\log z| &= |e^w w| \\
&= |w||e^w| \\
&= \sqrt{u^2+v^2}\,e^u \\
&\le \sqrt{u^2+\pi^2}\,e^u \quad (-\pi < v < \pi\text{だから})
\end{aligned}$$

$z \to 0$ のとき $u \to \infty$ なので

$$\lim_{-\pi<\arg z<\pi;\ z\to 0} |z\log z| \le \lim_{u\to-\infty} \sqrt{u^2+\pi^2}\,e^u$$

$U = -u$ とおくと、

$$\lim_{u \to -\infty} \sqrt{u^2 + \pi^2} e^u = \lim_{U \to \infty} \frac{\sqrt{U^2 + \pi^2}}{e^U} = \lim_{U \to \infty} \sqrt{\frac{U^2 + \pi^2}{e^{2U}}}$$

ここで e^{2U} をテイラー展開してみると、極限値はゼロになることがわかる。

8.

(a)　$\frac{1}{2}\log 2 + i(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$　$(n \in \mathbb{Z})$

(c)　$z = x + iy$ とおき、$\cos(x + iy)$ を加法公式を使って変形し、実部を 0、虚部を 1 とおいて計算すると次の答えが求まる。二次方程式の解を求める作業も途中で必要。

答えは、$\frac{\pi}{2} + n\pi + i\log(\sqrt{2} - (-1)^n)$　$(n \in \mathbb{Z})$

9.　$z = x + iy$ とおいたとき、$x \le |z|$ となることがヒント。

10.

(a)　集合 $\{z = x + iy \mid x > 0\}$ を図にしたもの。

(b)　こいつあちょっと難しい。しかも、どうやら範囲外だったようです。削除してください。ご免なさい。

14.　加法公式より

$$(*) \qquad \sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$$

となり、

$$(**) \qquad \cos(iy) = \frac{(e^{-y} + e^y)}{2};\ \sin(iy) = -i\frac{(e^{-y} - e^y)}{2}$$

となることを頭の隅においておく。

z-平面上の実軸に平行な直線 $\{x + iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ を $w = \sin z$ で写すと w-平面上のどういう図形に写るか考えると、

$$A = \frac{(e^{-y_0} + e^{y_0})}{2};\ B = \frac{(e^{-y} - e^y)}{2}$$

とおくと、

$$u = A\sin x;\ v = -B\cos x$$

を、$(*)$ と $(**)$ から得る。x を消去して u, v のみの関係を求めると

$$(\frac{u}{A})^2 + (\frac{v}{B})^2 = 1$$

という楕円の方程式が求まる（ただし、B がゼロではない場合。B がゼロとなる場合は別に求める)。

次に、z-平面上の虚軸に平行な直線 $\{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ を $w = \sin z$ で写すと w-平面上のどういう図形に写るか考えると、

$$u = \sin x_0\frac{(e^{-y} + e^y)}{2};\ v = -\cos x_0\frac{(e^{-y} - e^y)}{2}$$

を、$(*)$ と $(**)$ から得る。

$$(\frac{(e^{-y} + e^y)}{2})^2 - (\frac{(e^{-y} - e^y)}{2})^2 = 1$$

に注意すると、x を消去して u, v のみの関係を求めることができ、

$$(\frac{u}{\sin x_0})^2 - (\frac{v}{\cos x_0})^2 = 1$$

という双曲線の方程式が求まる（ただし、$\sin x_0$ や $\cos x_0$ がゼロではない場合。これらがゼロとなる場合は別に求める）。
以上を絵に描いてみると写像としての様子がわかる。

15.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

16.　$(a - bi)z$

17.

(c)　原点でのみ微分可能

(d)　原点でのみ微分可能

18.

(b)　$e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$ を、定義に従って微分してみると、

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z}$$

がでてくるが、$e^{\Delta z}$ をテイラー展開してみると、極限値は 1 であることがわかる。

19.　問題中の $u(x; y)$ を

$$u(x; y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & x + iy \neq 0 \\ 0 & x + iy = 0 \end{cases}$$

と訂正してください。授業中にほとんどおんなじ問題をやっているので、解説は省略。

21.

$$\frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

25.　記号が若干異なるが、(a)　はテキストの演習問題中に同じ問題があり、ヒントが載っているので省略。

(b) については、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

などの偏微分

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x; y); \ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x; y)$$

などを計算し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x; y) &= \frac{\partial u}{\partial r}(r; \theta)\frac{\partial r}{\partial x}(x; y) + \frac{\partial u}{\partial \theta}(r; \theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}(x; y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x; y) &= \frac{\partial v}{\partial r}(r; \theta)\frac{\partial r}{\partial x}(x; y) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r; \theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}(x; y) \end{aligned}$$

などに代入し、さらにそれを 23 に代入して整理すれば得られる。

27.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x; y)$$

とは、$u(x; y)$ の x に関する偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial x}(x; y)$ を新しい関数として、その関数を x に関して偏微分して得られる偏導関数のことです。すなわち、

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}(x; y)$$

のことです。
(b) のポイントはコーシー・リーマン方程式ですが、(a) のポイントは以下です。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)$$

すなわち、

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y}(x, y)$$

と、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)$$

すなわち、

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x}(x, y)$$

が、$u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数である場合にはピッタリと一致してしまう。つまり、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)$$

が、$u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数であるときは、成り立つのです。この事実は授業中には説明することを忘れていました（ご免なさい）。以下に証明の概略を一応書いておきますが、この事実が成り立つものとして使ってください。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \\
= \quad & \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) \\
= \quad & \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \right. \\
& \qquad \left. - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \right) \\
= \quad & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \right. \\
& \qquad \left. - \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \right) \\
= \quad & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x + \Delta x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) \\
= \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)
\end{aligned}$$

$u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数の場合という仮定は、記号 lim の入れ替えを行っている箇所のみで利用します。