# 予想問題集の一部の問題の解説

平成 12 年 1 月 26 日

予想を装う問題集の中の問題について「いろいろ考えてみたけどここがよくわからない」と問い合わせのあった問題について、ここで解説することにします。
１月３１日（月）の３時限終了時間（２時３０分）までに（メールであるいは口頭で）問い合わせのあった問題について、全員に知らせる形で解説したほうが良いと判断した場合は、それらの解説を順次追加していきます。

**4 (c)** $\cos z = i$ **を解きなさい**

テキスト４０ページの問 2.11 に

写像としての $\cos z$, $\sin z$ を調べよ

という問題がありました。「予想を装う問題集」でも１０番がその問題です（ただし $\sin z$ だけだけど）。これができていれば「$\cos z = i$ となる $z$ はだいたいこういう値だろう」という見当はつきます。値をピッタリと求めるには計算しなければなりません。では何を使って計算するのか？

使えるのは、

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

しかないのです。これから、

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} \\
&= \frac{e^{-y}\cos x + e^{y}\cos(-x)}{2} + i\frac{e^{-y}\sin x + e^{y}\sin(-x)}{2} \\
&= \frac{\cos x(e^{-y} + e^{y})}{2} + i\frac{\sin x(e^{-y} - e^{y})}{2}
\end{aligned}$$

を得ます。このことから、$z$-平面内の $y = y_0\,(y_0 \neq 0)$ という直線は、$w$-平面内の楕円に写る（$y_0 = 0$ のときは楕円がつぶれてできる線分に写る）ことがわかり、$w = \cos z$ の写像の様子を理解できるのですが、$\cos z = i$ となる $z$ を求めるには、

$$\frac{\cos x(e^{-y} + e^{y})}{2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\sin x(e^{-y} - e^{y})}{2} = 1 \tag{2}$$

となる $(x, y)$ を求めれば良いことになります。

$e^{-y} + e^{y} = e^{-y}(1 + e^{2y}) > 0$ なので、(1) より

$$\cos x = 0 \tag{3}$$

を得、これと (2) より

$$\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \pm 1 \tag{4}$$

を得ます。(3)、(4)　を解けば $(x, y)$ の正確な値が求まるので、$\cos z = i$ となる $z$ の値が求まることになります。尚、(4) は $e^{y}$ に関する 2 次方程式ですので、$y$ の値は自然対数を使って表されます (残念ながらきれいな値にはなりません)。