複素関数論II試験

１９９９年１月２６日

問題１　　複素関数 $f(z) = x^3 - iy^3$ (但し $z = x + iy$ とおいている)　は $z = 0$ で微分可能であるが、$z = 0$ で正則でないことを示せ。

問題２　　次の複素関数に対し、与えられた点 $z = a$ において微分可能ならば $\frac{d}{dz}f(a)$ を求め、与えられた点 $z = a$ において微分可能でないならばその理由を述べよ。

(1) $f(z) = \tan z \qquad (a = i)$

(2) $f(z) = \log(\cos(z)) \qquad (a = -i)$

(3) $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) \qquad (a = 1)$　　(但し $z = x + iy$ とおいている)

問題３　　次の複素関数を曲線

$$C = \{z \in \mathbf{C} \mid z = t + it^2,\ (0 \le t \le 1)\}$$

に沿って積分せよ。

(1) $\qquad f(z) = \bar{z}$

(2) $\qquad f(z) = |z|^2$

問題４　　与えられた曲線 C に沿った複素積分

$$\int_C \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)}dz$$

を計算せよ。

(1) $\qquad C = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = \frac{3}{2}\}$

(2) $\qquad C = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 10\}$