

### 補足 1

$p2mg$  のパターンは映進面と鏡面の組み合わせですから、 $p2mm$  と  $p2gg$  から類推が付くように、**補足図 1** のようになります。2 回軸が現れる理由ももう簡単に理解できるでしょう。このパターンについては図だけで詳しい説明を省きます。皆さんで考えて下さい。この図でも 2 回軸は短い平行な 2 本の線で示されています。x 方向に映進面が走り、y 方向に鏡面があります。

### 補足 2

$p4gm$  は  $p2gm$  の場合と同じで、鏡面の代わりに映進面があります。**補足図 2** にそのパターンを示します。この場合は対称が若干分かり難いので説明を加えることにします。一つの 4 回軸（4 枚羽の風車の記号で示してあります）の回りで、A00 から D00 のト音記号が 4 回対称で関係付けられます。x（水平）方向に走る映進面  $g_1$ （点線）で A00 は  $\beta 00$ 、A10、 $\beta 10$ 、A20、 $\beta 20$ …と反復配列していきます。B00 もこの映進面で  $\gamma 00$ 、B10、 $\gamma 10$ …と反復していきます。同じ映進面で C00 と D00 は  $\delta 00$  と  $\alpha 00$  に映ります。4 回軸の要請で、y 方向に走る映進面  $g_2$  が存在し、A00、 $\delta 00$ 、A01、 $\delta 01$ …のように反復されます。A00 から D00 までの一組と対応する  $\alpha 00$  から  $\delta 00$  までの一組は鏡像の関係にあり、対角方向に走る鏡面  $m_1$  があります。4 回対称により、この鏡面に垂直な鏡面  $m_2$  が生じます。鏡面の交点には 2 回軸が存在します。2 回軸の一つで、A00、B00、C00 そして D00 の各ト音記号は C01、D01、A01 そして B01 の各ト音記号に移ります。このように 4 回対称には 2 回対称が必ず含まれます。この平面上に反復されるどのト音記号もこれらの対称操作のどれかで必ず関係付けられることはもちろんです。単位胞を右上に実線で示しました。この場合も正方形格子を取ります。単位胞には 8 個のト音記号が含まれます。ちぎれたト音記号が 8 個単位胞に掛かっていますが、単位胞の内側に入ってくるのは正確に 4 個分です。このように取った単位胞には、4 回軸が 5 本、2 回軸が 4 本、鏡面が 4 枚、そして映進面が 4 枚含まれます。

### 補足 3

$p3m1$  と似ている  $p31m$  というパターンを**補足図 3** に示します。このパターンでは x および y 軸に対して垂直になるような鏡面はありません。x 軸そして y 軸方向、そして対角方向に走る  $m_1$ 、 $m_2$  そして  $m_3$  の鏡面があります。さらに x および y 軸に平行な映進面  $g_1$  および  $g_2$ 、そしてそれらを  $120^\circ$  回転して得られる映進面  $g_3$  が存在します。単位胞は右上で太い実線で囲んだところになり、その中に 6 個のト音記号が含まれます。この単位胞の形は、 $p3$  や  $p3m1$  のように、二つの正三角形が一つの辺を共有した菱形ですが、六角形格子を取ることできます。

### 補足 4

壁紙パターンの中で一番複雑なのは、**補足図 4** に示す  $p6mm$  です。6 回回転軸が並進する  $p6$  で出現した新たな 3 回回転軸そして 2 回回転軸の位置と数は変わりません。さらに a 軸そして b 軸に対して垂直な鏡面が加わります。その結果、a および b 軸に垂直および平行な

映進面が新たに生じます。単位胞は太い実線で囲んだ部分であり、12 個のト音記号が含まれます。単位胞は菱形ですが、6 回回転対称軸を中心とする六角形の単位胞も考えることは可能です。このパターンは正に万華鏡の様相を示しています。

#### 補足 5

$C2mm$  は  $Cm$  に 2 回対称軸を加えてもので、そのパターンを補足図 5 に示します。このパターンはかなり複雑になります。まず  $A00$  が有心操作で  $A^c00$  に移ります。また 2 回軸により、 $A^200$  に移り、さらに  $A^200$  は有心操作で  $A^{2c}00$  に移ります。 $A00$  は  $m_1$  にある鏡面で  $B00$  に映りますが、それに有心と 2 回回転操作をすると、 $B^c00$ 、 $B^200$  そして  $B^{2c}$  が得られます。従って、パターンの繰り返しの基本単位には 8 個のト音記号が含まれることになります。単位胞の取り方の例を右下の長方形で示しました。その上に単純格子（菱形）で取った単位胞も示しました。これまでの例を理解して来れば、新たにどのように対称操作が生じるかを予測することはそれほど難しくありません。図に示したように、 $a$  方向に平行に  $m_2$  の鏡面が生じると共に、 $b$  方向にも半周期毎に鏡面ができます。さらに、当初考えていなかった映進面も  $a$  軸そして  $b$  軸方向に半周期毎に出現します。例えば、 $A00$  と  $B^{2c}00$  そして  $B00$  と  $A^{2c}00$  等の関係は映進面  $g_2$  で関係付けられますし、 $A00$  と  $B^c00$  そして  $B00$  と  $A^c00$  などの関係は映進面  $g_1$  で関係付けられます。また 2 回回転軸は全ての鏡面と映進面の交点に生じます。従って、 $C2mm$  は  $C2mg$ 、 $C2gm$ 、あるいは  $C2gg$  と表現しても良いのですが、単に鏡面を映進面より優先するという表記法に従って、 $C2mm$  となっています。また、これまでの話から分かるように、仮に  $Cmm$  としても対称操作の内容は全く変わりありません。これも、出現する一番高次の回転対称を記号に示すという規則に従っているだけです。 $C2mm$  の対称に出現する対称は並進、有心、2 回対称、鏡面、そして映進面です。 $C2mm$  の対称の小宇宙を作っています。

#### 補足 6

空間群  $C2$  は単斜晶系で、 $C$  底心格子を持ち、 $b$  軸方向に 2 回対称軸を持ちます。その模式図を補足図 10 に示します。2 回回転軸を原点に置くと、単位胞に 9 箇所 2 回対称軸が生じることは既に空間群  $P2$  で見た通りです。(1) は単位胞中心にある 2 回回転軸で(2)に関係付けられます。 $C$  底心は  $ab$  面において、半格子分の並進( $x+1/2, y+1/2$ )ですから、(1)に  $C$  底心の操作をすると、(3)に移ります。 $\bigcirc_{1/2+}$ の  $1/2+$ は紙面手前方向に向かう  $b$  軸方向に  $1/2$  格子分だけ並進していることを示します。単なる並進ですから  $\bigcirc$  のままです。(2)に対して同様に  $C$  底心の操作をすると、(4)になります。すなわち空間群  $C2$  では単位胞中に 4 個の  $\bigcirc$  が存在することになります。非対称単位が 4 つあることになります。またこの場合も、空間群の記号には含まれていなかった対称が生じます。(1)と(4)そして(2)と(3)の関係を調べると、それらの中点に  $2_1$  らせん軸ができていたことが分かります。これは、2 回対称と  $C$  底心が組み合わせられた結果です。空間群  $C2$  には、2 回対称、 $2_1$  らせん対称、 $C$  底心、そして並進が対称要素として存在します。補足図 11 に化学構造式を示した分子はエヴァロース（正確にはメチルー  $\alpha$ -L-エヴァロピラノシド）という糖の一種です。その結晶は空

間群  $C_2$  になり、その結晶構造を補足図 12 に示します。a 軸（縦）と c 軸方向に 2 格子ずつ表示していますが、 $C_2$  の対称は理解できると思います。

#### 補足 7

3 回回反対称のモードを補足図 14 に示します。(1)を円の中心に対して  $120^\circ$  回転すると(5)の位置に行きます。これを円の中心で反転すると、(2)になります。(1)が紙面の上にあり、高さの座標が+であれば、(2)は紙面の下に行きますので、その座標は-になります。また(2)は反転しますので、(1)を右手○とすると(2)は左手になりますから、 $\odot$ になります。3回回反操作で(2)は(6)を経由して(3)になります。このような操作を行い、この図の6個の点は回反操作で関係付けられ、(6)は(4)を経由して(1)に戻ります。