導入でも練習でも使える 定積分の教具

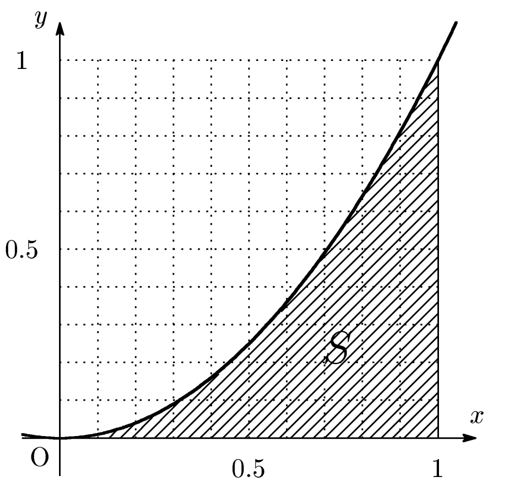
よしだ　はじめ
YOSHIDA, Hajime

2006 年 8 月 26, 27 日 関東地区数学教育協議会 夏の研究集会 (長野・戸倉上山田)

I．洋服ハンガーをてんびんに使って定積分の値を確認

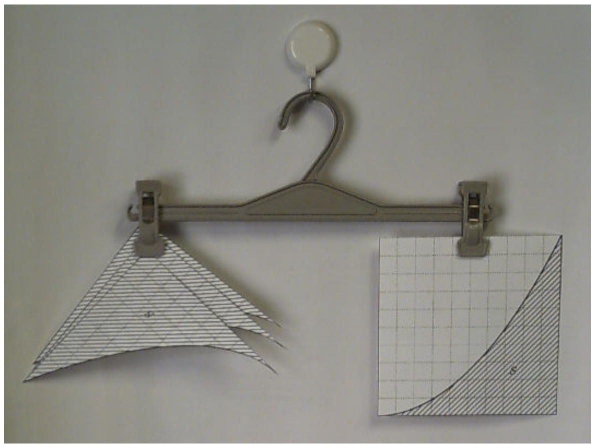
定積分の導入時には，区分求積で $\displaystyle\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ を求めた後，これを確かめるために，厚紙で形を切り取って重さを量るという方法があります．1 辺が 1 の正方形の紙と $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$ の表す図形の紙 3 枚の重さがつりあうことで確認できます．
このため，てんびんを用意するのですが，準備はなるべく簡単なほうがいい．また，あまり敏感に反応するてんびんではかえって困ることも知られています．そこで次のようにしました．

① グラフはパソコンで描き，厚紙へ直接印刷して切り抜きます．パソコンのプリンタで印刷可能なできるだけ厚いものとして，A4 サイズの厚手のケント紙を使いました．



② てんびんには洋服ハンガーを使いました．スカート用のハンガーだと思います．腕が水平で両端にクリップが付いているものがありました．このクリップに切り抜いた紙をはさみます．紙の重心がクリップの位置の真下にくるように多少の調整が必要です．

③ さて，これをどこへ掛けるか．磁石付きのフックが売っていました．荷重約 1kg なので十分です．黒板へフックを貼り付け，ハンガーを掛ければてんびんになります．うまくつりあいますか？



$3 \times S = 1$

II．問題練習でも教具は使える

導入時に教具を使っても，その後の問題練習は黒板だけ ——これではもったいない．というより，教具を適切な場面で利用することによって，理解をより深めることができるのです．
指導の順序として，次の問題は先に扱っておきます．

【問 1】　次の定積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$

【解 1】　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx = \Big[-\frac{x^3}{3}+4x\Big]_{-2}^{2}$

$$= \left(-\frac{8}{3}+8\right) - \left(\frac{-8}{3}-8\right) = -\frac{16}{3}+16$$
$$= \frac{32}{3}.$$

この後ほどなく（1，2 時間後），次の問題を扱います．

【問２】放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ と直線 $y = -2x + 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

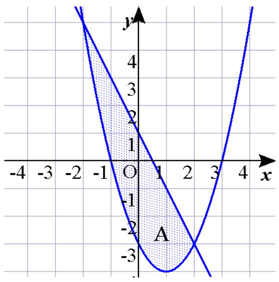
【解２】$y = x^2 - 2x - 3$ と $y = -2x + 1$ のグラフの交点の x 座標は $x^2 - 2x - 3 = -2x + 1$ を解いて，$x^2 - 4 = 0$ より $x = -2,\ 2$．
$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲では $x^2 - 2x - 3 \leqq -2x + 1$，すなわち放物線より直線のほうが上にあるから，求める面積は，

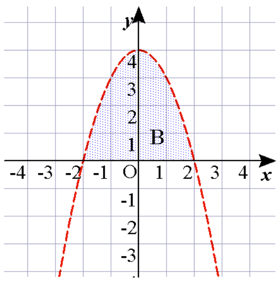
$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2} \{(-2x+1) - (x^2 - 2x - 3)\}\,dx \\ =\ &\int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} \\ =\ &\left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(-\frac{-8}{3} - 8\right) = -\frac{16}{3} + 16 \\ =\ &\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

途中から，前にやった問題【問１】と同じ計算になりました．

$$\int_{-2}^{2} \{(-2x+1) - (x^2 - 2x - 3)\}\,dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx$$

これは，グラフでは左 (A) と右 (B) の図形の面積が等しいということです．





それぞれの形を厚紙で切り抜いて，てんびんで量ってみましょう．つりあいますか？

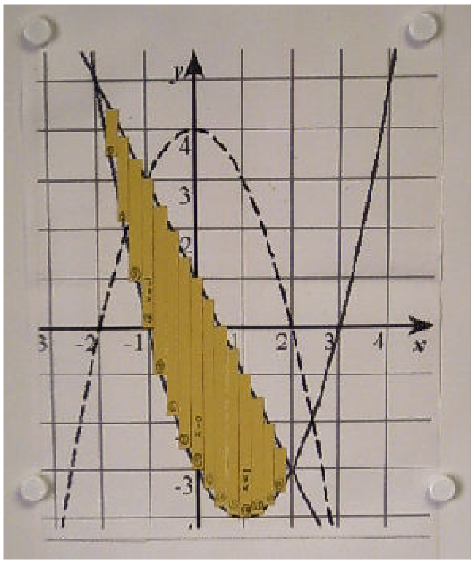
Ⅲ．区分求積に戻って再確認

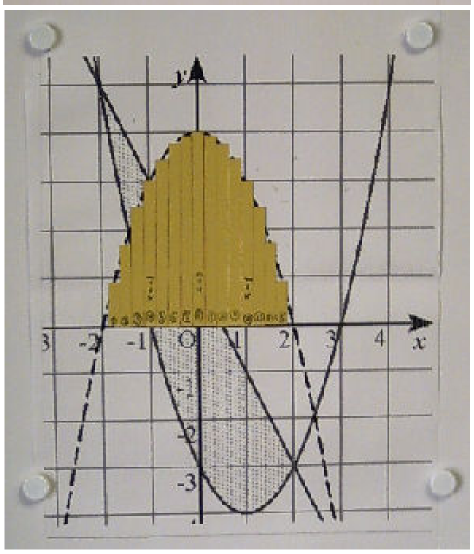
定積分は区分求積の極限で定義されました．もういちど区分求積に戻って，

$$\int_{-2}^{2} \{(-2x+1) - (x^2 - 2x - 3)\}\,dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx$$

であることを確認してみましょう．

区分求積の手法の通り，図形をテープ状の縦長の長方形を寄せ集めたものと考えます．そこで，マグネットシートをテープ状に切って使いました．これを並べて，前掲左 (A) の図形を埋めていきます．
次に，それぞれの長方形（テープ状のマグネットシート）を x の位置はそのままで y 軸方向に平行移動させ，前掲右 (B) の図形を埋めていきます．
ぴったり収まりましたか？





〔文書・数式作成：LaTeX，グラフ作成：WinTpic，GRAPES〕