授業で使える大学入試の文章問題

問20～32　解答・解説

よしだ はじめ

吉　田　一

河合塾 COSMO コース講師

ホームページ：$\boxed{\text{よしだはじめ数学教育}}$ 検索

http://www.ne.jp/asahi/math.edu/ami/mypage/

cq2h-ysd@asahi-net.or.jp

2009 年 10 月 27 日

【注】コメントの大部分は最初に書いた当時のままです．未完のものもあります．追々，書き直したり，書き加えたりするかもしれません．

3　解答・解説編

問 20　A市の人口は近年増加傾向にある．現在，A市の人口は前年同時期の人口と比べて 8% 増加している．毎年この比率で増加するとした場合，人口が現在の 4 倍を超えるのは $\boxed{}$ 年後である．
$\boxed{}$ に適当な整数を入れよ．また $\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ．

〔06 立命館大・文系〕

解答　$1.08^n \geqq 4$ となる整数 n の最小値を求める．
両辺の常用対数をとって，

$$n \log_{10} 1.08 \geqq 2 \log_{10} 2$$

これより，

$$\begin{aligned}
n \log_{10} \frac{108}{100} &\geqq 2 \log_{10} 2 \\
n \left(\log_{10}(2^2 3^3) - \log_{10} 10^2\right) &\geqq 2 \log_{10} 2 \\
n \left(2 \log_{10} 2 + 3 \log_{10} 3 - 2\right) &\geqq 2 \log_{10} 2
\end{aligned}$$

ここで，$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ より，

$$\begin{aligned}
n \left(2 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 - 2\right) &\geqq 2 \times 0.3010 \\
n \left(0.6020 + 1.4313 - 2\right) &\geqq 0.6020 \\
0.0333n &\geqq 0.6020 \\
n &\geqq \frac{0.6020}{0.0333} = 18.\cdots
\end{aligned}$$

よって，19 年後．

コメント　問題設定の状況にはかなり無理があるのかも．

問 21　$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 7 = 0.8451$ とする．$\log_{10} 98$ を計算すると $\boxed{\text{ア}}$ である．

さて，ある国の人口が 1 年間に 2 %の割合で減少し続けるとすると，n 年後には，この国の人口が初めて現在の人口の 50 %未満となる．この整数 n を求めると $n = \boxed{\text{イ}}$ である．

〔07 南山大・数理情報〕

解答　$\log_{10} 98 = \log_{10}(2 \times 7^2) = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 7 = 0.3010 + 2 \times 0.8451 = 1.9912.$

$0.98^n < 0.5$ となる最小の n を求めればよい．

両辺の常用対数をとって，　$\log_{10} 0.98^n < \log_{10} \dfrac{1}{2}.$

これと上の結果より，

$$\begin{aligned} n\log_{10} \frac{98}{100} &< \log_{10} \frac{1}{2} \\ n \times (\log_{10} 98 - \log_{10} 100) &< \log_{10} 1 - \log_{10} 2 \\ n \times (1.9912 - 2) &< 0 - 0.3010 \\ n \times (-0.0088) &< -0.3010 \\ n &> \frac{3010}{88} = 34.2\cdots. \end{aligned}$$

よって，$n = 35.$

すなわち，$\boxed{\text{ア}}$ は **1.9912**，$\boxed{\text{イ}}$ は **35**.

コメント　関数電卓で数値を求めてみると，

$$\begin{aligned} \log_{10} 98 &= 1.991226\cdots, \\ 0.98^{34} &= 0.503\cdots, \\ 0.98^{35} &= 0.493\cdots \end{aligned}$$

でした．

そろそろ関数電卓を使うことを前提にした出題もあっていいのではないでしょうか．試験での電卓利用に関しては日本は遅れています．

ところで，この種の人口の問題では人口の「増加」を扱うのが一般的でしたが，少子化の現実に合せたのでしょうか，とうとう「減少」の問題が出題されました．世相を反映していますね．

問 22　A国の人口は現在１億人であるが，
今後５年間は年２％の減少，それ以後は年１％の減少が見込まれている．A国の人口がはじめて6000万人未満になるのは何年後と考えられるか．自然数で答えよ．
ただし，右の表を必要に応じて使用してよい．

$\log_{10} 2$	0.3010
$\log_{10} 3$	0.4771
$\log_{10} 5$	0.6990
$\log_{10} 7$	0.8451
$\log_{10} 11$	1.0414

〔08 名古屋市大・医〕

解答　最初の５年後の人口減は多く見積もっても 1000 万人未満である．したがって，

$$10^8 \times 0.98^5 \times 0.99^{n-5} < 6 \times 10^7 \quad (n \geqq 6)$$

となる最小の n を求めればよい．これより，

$$\begin{aligned} 0.98^5 \times 0.99^{n-5} &< \frac{3}{5}, \\ \left(\frac{98}{100}\right)^5 \times \left(\frac{99}{100}\right)^{n-5} &< \frac{3}{5}, \\ \left(\frac{99}{100}\right)^n &< \frac{3}{5} \times \left(\frac{99}{98}\right)^5. \end{aligned}$$

両辺の常用対数をとって，

$$n \log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) < \log_{10} 3 - \log_{10} 5 + 5\log_{10}\left(\frac{99}{98}\right),$$
$$n(\log_{10} 11 + 2\log_{10} 3 - 2) < \log_{10} 3 - \log_{10} 5 + 5(\log_{10} 11 + 2\log_{10} 3 - \log_{10} 2 - 2\log_{10} 7).$$

表より数値を代入して計算すると，

$$n > \frac{1999}{44} = 45.4\cdots$$

したがって，46 年後．

コメント　これも昨年から見かけ出した，人口が減少していく問題です．
結局，数表の数値はすべて必要でした．でも, 計算はメンドウ．きちんと論述させたうえで，電卓を使用するべき問題でしょう．

解答の最初の１行は，もう少し書くと次の通り．

> １年目で 200 万人減り，それが５年続くと 1000 万人．実際には減る人数は１年ごとに 200 万人より少なくなっていくのだから，1000 万人は減らない．

この程度は，暗算で済ませればよいのです．それが指数感覚というもの．
しかし，この１行を書かないと，$n \geqq 6$ である次の行の式が書けません．

問 23　ある微生物は一定時間ごとに1回分裂して，個数が2倍に増えていく．この微生物1個を観察ケースに入れた．この微生物が観察途中で死ぬことなく増えていくとき，次の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) この微生物が12回分裂したときの，観察ケース内の微生物の個数を求めよ．

(2) 観察ケース内の微生物が初めて100万個以上になるのは，何回分裂したときか．

(3) 観察開始から6回の分裂を経るたびに，瞬時に微生物の個数を数えた後で，観察ケース内の微生物の半数を取り除くものとする．このとき，観察ケース内の微生物が初めて100万個以上になるのは，何回分裂した直後か．

〔08 岩手大・農〕

解答

(1) $2^{12} = 4096$.

(2) $2^n \geqq 1000000$ となる最小の n（n は正の整数）を求める．
両辺の常用対数をとると，$n \log_{10} 2 \geqq 6$.
これより，$n \geqq \dfrac{6}{\log_{10} 2} = \dfrac{6}{0.3010} = 19.9\cdots$.
したがって，20回分裂したとき．

(3) 6回ごとに半数を取り除くということは，分裂が1回なかったのと同じことになる．
(2) の結果を考慮して，$\dfrac{20}{6} = 3.\cdots$ であるから，6回ごとを3度，すなわち，18回分裂した後に取り除いたときの個数は取り除かずに15回分裂させたときと同じ個数になる．
取り除かずに20回の分裂と同じ結果を得るにはあと5回の分裂が必要で，このときはもう一度取り除く操作はない．
したがって，$18 + 5 = 23$ 回．

コメント　(1) はコンピュータを使っている人にはおなじみの，暗算で求められる（というより，たいていは暗記している）値です．

(2) も $2^{10} = 1024$（つまり1000よりちょっとだけ大きい），ということを知っていると（これも暗記している），2^{20} がほぼ100万（100万よりちょっとだけ大きい）ということがわかるでしょう．(実際は $2^{20} = 1048576$．ここまでは暗記してない)

(3) は,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
k	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	10	11	$\cdots$

という対応表に相当する関数 $k = f(n)$ がわかれば 2^k で表せます．

Excel の関数では `□-int(□/6)` で求められます．

しかし，(3) はほんとうにそんなことができるのか？　しかも時間内に？

問 24　200X 年 9 月 1 日午後 6 時に，ある台風の中心が鹿児島県鹿児島市（北緯 31.6 度，東経 130.6 度）に上陸した．この台風は，時速 20km で真北に向かって進んでおり，中心から半径 70km の円内が暴風域になっていると仮定する．

台風の勢力・速度・進行方向が変わらない場合，山口県下関市（北緯 34.0 度，東経 131.0 度）が暴風域に入る日時を答えよ．時刻は四捨五入して分単位で表せ．

なお，緯度 1 度あたりの距離を 110km，北緯 30 度から北緯 35 度の範囲内での経度 1 度あたりの距離を 90km とし，問題となっている区域は平面であると仮定する．

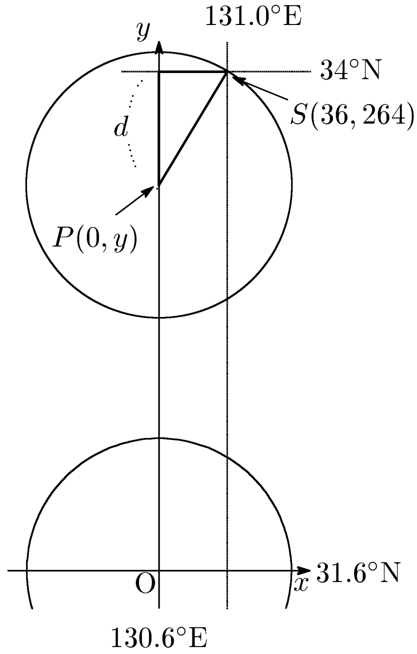
〔05 成城大・法〕

解答

東を座標軸の x 軸の正の方向，北を y 軸の正の方向にとる．また，x 軸，y 軸の 1 は 1km とする．鹿児島県鹿児島市（北緯 31.6 度，東経 130.6 度）を座標軸の原点 $(0,0)$ とすれば，山口県下関市（北緯 34.0 度，東経 131.0 度）は，経度の差が +0.4 度，緯度の差が +2.4 度だから，

$(90 \times 0.4,\ 110 \times 2.4) = (36,\ 264)$

となる．この点を S とする．



台風が真北に進み，S からの距離が 70km になる地点 $P(0, y)$ を求める．$(0, 264)$ と $P(0, y)$ の距離を d とすると，

$70^2 = 36^2 + d^2$ より，$d = \sqrt{3604} \fallingdotseq 60$.

よって，$y = 264 - 60 = 204$.

時速 20km の台風が 204km を進む時間は，

$\dfrac{204}{20} = 10.2$(時間)=10 時間 12 分.

9 月 1 日午後 6 時の 10 時間 12 分後が到達時刻で，9 月 2 日午前 4 時 12 分.

コメント　ピタゴラスの定理と速度の計算，角度の換算で解けるので，中学生向けでもよさそう．

計算誤差の評価が気になります．電卓を使えば $d = \sqrt{3604} = 60.033\cdots$ で，これを 60 としても解の誤差は 10 秒以下なのがわかる．電卓なしでも，$(60+e)^2 = 3600+120e+e^2$ から，$e \fallingdotseq \frac{4}{120} \fallingdotseq 0.03$ という評価は可能ですが，受験生には酷でしょう．

次に，問題文中に提示された数値を検証します．地球 1 周約 40000km（これは常識の数値？）とすると，緯度 1 度あたりは $\dfrac{40000}{360} = 111.11\cdots$km，北緯 $\theta°$ の経度 1 度あたりは $\dfrac{40000}{360}\cos\theta$ なので，$\cos 30° = 0.866\cdots$，$\cos 35° = 0.819\cdots$ より，北緯 30 度で 96.2km，北緯 35 度で 91.0km．問題中の値は少し小さめ．これらの値を求めさせるのも悪くない問題です.

問 25　半径 170km の暴風圏をもつ台風が，真北に向かって時速 20km の速さで進んでいるとき，台風の中心から真東に 230km 離れた洋上を，時速 20km で真西に進んでいる船があるとする．台風の勢力は当分の間変化せず，したがって暴風圏も当分の間変わらないとする．更に，この船は台風に影響されずに同じ速度で進むとする．このとき，この船が暴風圏に入るのは今から $\boxed{\text{ア}}$ 時間後であり，暴風圏に入ってから $\boxed{\text{イ}}$ 時間後に暴風圏を抜け出す.

〔06 摂南大・工〕

解答　t 時間後の台風の位置を T，船の位置を S とすると[*1]，$\mathrm{T}(0, 20t)$, $\mathrm{S}(230-20t, 0)$ と表せる.

T と S の距離を r $(\geqq 0)$ とすると，

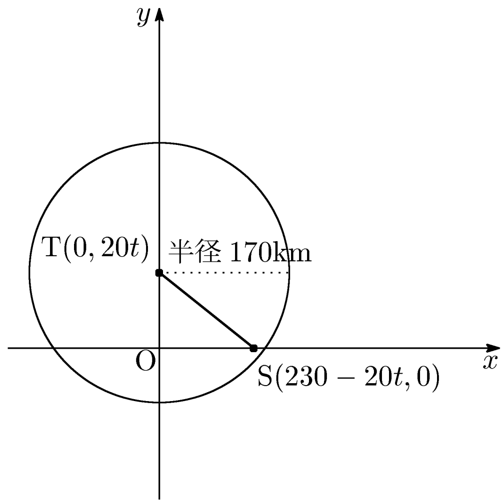
$$r^2 = (230-20t)^2 + (20t)^2 \ .$$

船が暴風圏の内部にあるのは $r \leqq 170$ だから， $r^2 \leqq 170^2$ より，

$$(230-20t)^2 + (20t)^2 \leqq 170^2.$$

これを整理して，

$$2t^2 - 23t + 60 \leqq 0,$$
$$(t-4)(2t-15) \leqq 0.$$



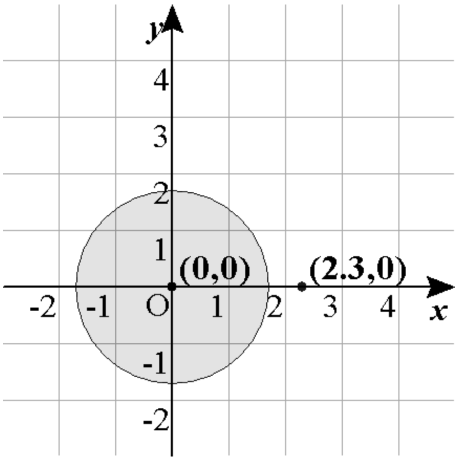
これより，$4 \leqq t \leqq 7.5$.
船が暴風圏の内部にあるのは $7.5 - 4 = 3.5$ 時間.
よって，今から 4 時間後に暴風圏に入り，　$\cdots$ $\boxed{\text{ア}}$
暴風圏に入ってから 3.5 時間後に抜け出す.　$\cdots$ $\boxed{\text{イ}}$

コメント　2005 年度にも台風に関する出題をした大学がありました.（本問題集 2005 年版参照）こちらの問題は，緯度・経度から距離への換算はありませんが，台風と船が両方動きます．とはいえ，基本的には 2 点間の距離を求めるピタゴラスの定理による立式と，それを解く 2 次不等式で解決できます.

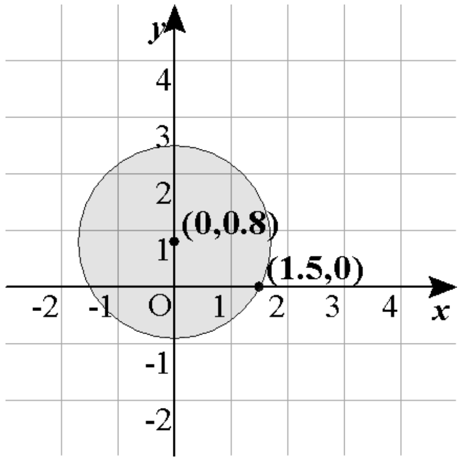
片方を止まっているとして，相対的な位置関係から求めることもできますが，このくらいなら，素直に両方動かして考えたほうがよいでしょう.

次ページの図は GRAPES で作成しました．t の値を連続的に変化させて，台風と船を同時に動かすことができます．なお，図は 100km を 1 としました.

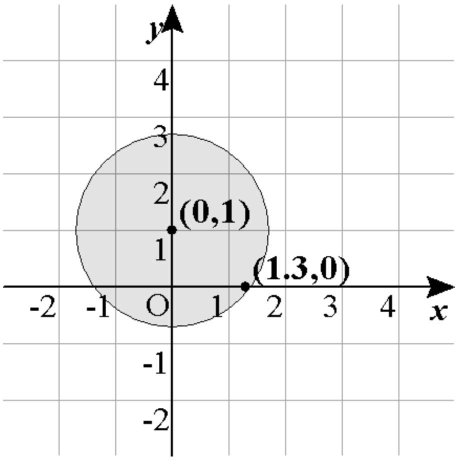
[*1] Typhoon の T，Ship の S としましたが，Storm って語もあって紛らわしいかな.



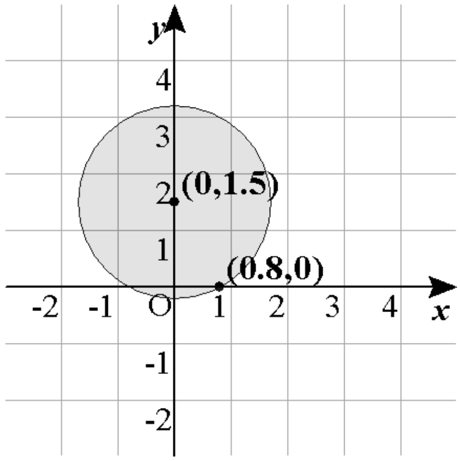
$t = 0$　最初



$t = 4$　突入



$t = 5$　圏内



$t = 7.5$　脱出

問 26　ＡさんがＢさんに対して裁判を起こすと，10 %の確率で 1 億円，20 %の確率で 5000 万円，30 %の確率で 2000 万円をＢさんから得られるが，40 %の確率で何も得られないとする．

(1) Ａさんの弁護士は，裁判でＡさんがＢさんから得た金額の 20 %を報酬として得ることができる．この弁護士の報酬の期待値を求めよ．

(2) この裁判でＡさんがＢさんから何も得られない場合にだけ，Ｂさんの弁護士は，Ｂさんから報酬を得ることができる．弁護士の報酬の期待値は，どちらも等しいとすると，Ｂさんが弁護士に支払う報酬の金額を求めよ．

(3) ＢさんはＡさんに対して 2000 万円を支払うことで，ＡさんがＢさんに対する裁判を起こさずに解決することを提案した．裁判を起こさなかった場合，どちらの弁護士にも報酬は支払われない．裁判を起こした場合，Ａさんが得る金額の期待値と弁護士に支払う報酬だけを考えて，Ｂさんの提案を受け入れることはＡさんにとって有利であるか，根拠を示して答えよ．

〔08 福井県大（後期）〕

解答

(1) Ａさんが得る金額の期待値を E とすると，

$$\begin{aligned} E &= 1\text{ 億円} \times 0.1 + 5\text{ 千万円} \times 0.2 + 2\text{ 千万円} \times 0.3 + 0\text{ 円} \times 0.4 \\ &= 1\text{ 千万円} + 1\text{ 千万円} + 6\text{ 百万円} + 0\text{ 円} = 2600\text{ 万円}. \end{aligned}$$

Ａさんの弁護士の報酬の期待値はＡさんの得る期待値の 20 %だから，

$$2600\text{ 万円} \times 0.2 = 520\text{ 万円}.$$

(2) Ｂさんが弁護士に支払う報酬を F とする．この報酬の期待値も 520 万円とするので，

$$520\text{ 万円} = F \times 0.4 + 0\text{ 円} \times (0.1 + 0.2 + 0.3)$$

となる．これより，　$F = \dfrac{520\text{ 万円}}{0.4} = 1300\text{ 万円}.$

(3) Ａさんが裁判を起こした場合，得る期待値と支払う期待値の差は

$$2600\text{ 万円} - 520\text{ 万円} = 2080\text{ 万円}.$$

一方，裁判を起こさなかった場合には，2000 万円を得られる．

$$2080\text{ 万円} > 2000\text{ 万円}$$

であるから，この条件だけで考えることにすれば，Ｂさんの提案を受け入れるのは有利ではない．

コメント　文章が長い割りには単純な問題でした．

授業で扱う場合には，(3) で実際には「これ以外の条件」としてどういうことが考えられるかを議論してみるのもよいでしょう．

問 27　図１のような円柱がある．この円柱に，１本の紙テープを重ならないように巻きつけて，側面をおおい，はみ出した部分のテープを切り取ると，図２のようになった．ただし，円柱の底面の直径を d，高さを h とし，テープの幅を a とする．

図１

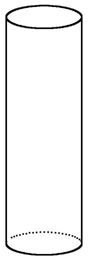
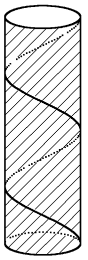


図２



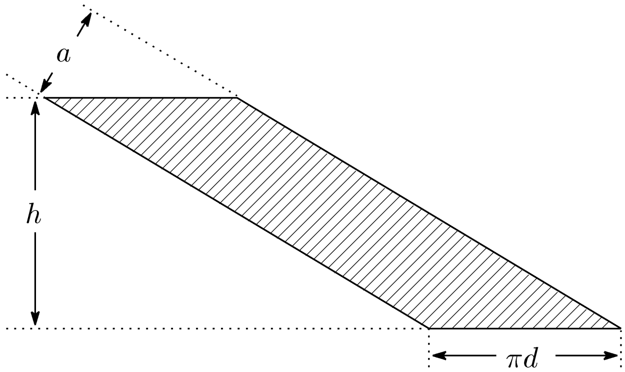
(1) 図２で円柱に巻かれているテープの面積を求めよ．

(2) 円柱に巻かれていたテープをほどいて平らにしたとき，どんな図形になるか．図で示し，大きさがわかるように，必要な長さをすべて記入せよ．

〔03 岩手大・人文社会科学〕

解答 (1)　テープの面積は円柱の側面積と等しくなるので，πdh.

(2)　図のような平行四辺形になる．

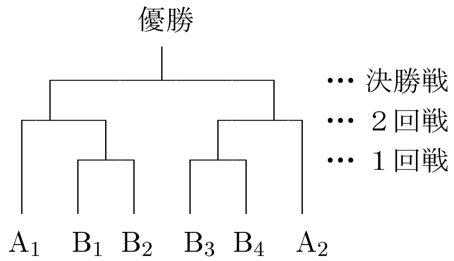


コメント テープの長さはいくらでもあると解釈しましょう．でも幅は？　もし，円柱の高さよりも，または円柱の周よりも幅の広いテープだったらどうなるでしょうか？

でも,「問題の図のように巻きつけられた」ということなので，このような意地悪な条件は考えなくてもいいのかもしれません．

ところで，問題用紙を切って鉛筆に巻きつけたりしたら，カンニングになるのでしょうか？　こういう問題を出したからには，身近な物を使って考えることを妨げてはいけないのでは？

問 28　6 名の選手 A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4 が図のような組合せのトーナメント方式で戦う．



ただし，引き分けはなく，どちらか一方のみが勝ち上がるものとする．ここで，A_1，A_2 の実力は対等であり，B_1，B_2，B_3，B_4 の実力も対等であるが，$A_i\,(i=1,2)$ と $B_j\,(j=1,2,3,4)$ の対戦では，A_i が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$ である．

このとき，B_1 が決勝戦に進出する確率を求めよ．また，B_1 が優勝する確率を求めよ．

〔05 立教大・理〕

解答 B_1 が決勝戦に進出するのは，B_2 に勝ち，A_1 に勝つ場合だから，

$$\frac{1}{2}\times(1-p)=\frac{1-p}{2}.$$

B_1 の決勝戦の相手は，
① p の確率で A_2，このとき，B_1 が勝つ確率は $1-p$，
② $1-p$ の確率で B_3 または B_4，このとき，B_1 が勝つ確率は $\frac{1}{2}$.
よって，B_1 が決勝戦で勝つ確率は，

$$p(1-p)+(1-p)\frac{1}{2}=(1-p)\left(p+\frac{1}{2}\right).$$

したがって，求める確率は，

$$\frac{1-p}{2}\times(1-p)\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{(1-p)^2(2p+1)}{4}.$$

コメント よく行われるシードのあるトーナメントについて確率を考える問題です．強い者（チーム）のほうをシードするということなら，$\frac{1}{2}<p<1$ です．ふつうは強い者（チーム）は 1 回戦を戦わないように振り分けるのですが，これでは強いほうがますます優勝しやすくなります．逆に，弱いほうにハンディを与えることも考えられます．それなら，$0<p<\frac{1}{2}$ です．強い者（チーム）が試合を多く勝ち上がることにすれば，各出場者（チーム）の優勝する確率を平均化できます．そんな組合せを考えてもいいのではないでしょうか．観客の総数も増えるかもしれません．

そこで，この問題のトーナメントで各出場者の優勝する確率が等しくなる p の値をコンピュータで求めてみました．すなわち，$\dfrac{(1-p)^2(2p+1)}{4}=\dfrac{1}{6}$ として，$0<p<1$ での解は $p\fallingdotseq 0.387$ でした．

問 29　A 地点から B 地点を経由して C 地点へと移動する．A から B までは下り坂のため，平均速度 90km/h で進めたが，B から C は上り坂のために平均速度 60km/h でしか進めなかった．また，A から C まで全体で考えた場合，平均速度は 75km/h であった．このとき，AB，BC 間のそれぞれの距離の比は $\boxed{\text{ア}}$ である．

一方，帰り道は反対に AB 間を 60km/h，BC 間を 90km/h で進んだ．このとき，C から A までの平均速度は $\boxed{\text{イ}}$ km/h となる（小数点以下第 2 位で四捨五入）．

〔08 愛知大〕

解答　A 地点と B 地点の距離を x_1，B 地点と C 地点の距離を x_2 とする．また，行きに A 地点から B 地点までにかかった時間を t_1，B 地点から C 地点までにかかった時間を t_2 とすると．$t_1 = \dfrac{x_1}{90},\quad t_2 = \dfrac{x_2}{60},\quad t_1 + t_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{75}$　であるから，

$$\frac{x_1}{90} + \frac{x_2}{60} = \frac{x_1 + x_2}{75}.$$

これより，

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{75}{90}x_1 + \frac{75}{60}x_2, \\ \frac{15}{90}x_1 &= \frac{15}{60}x_2, \\ \frac{1}{6}x_1 &= \frac{1}{4}x_2. \end{aligned}$$

よって，$x_1 : x_2 = 6 : 4 = 3 : 2.$　$\cdots \boxed{\text{ア}}$

また，帰りの AB 間の時間を T_1，BC 間の時間を T_2 とし，$x_1 = 3k,\ x_2 = 2k$ （k は正の定数）とおくと，

$$T_1 = \frac{3k}{60},\quad T_2 = \frac{2k}{90}$$

である．これより，求める平均速度は

$$\frac{3k + 2k}{T_1 + T_2} = \frac{5k}{\left(\frac{3k}{60} + \frac{2k}{90}\right)} = \frac{5k}{\left(\frac{9k+4k}{180}\right)} = \frac{5k}{\left(\frac{13k}{180}\right)} = \frac{900}{13} = 69.23\cdots$$

小数第 2 位を四捨五入すると，C から A までの平均速度は 69.2 km/h.　$\cdots \boxed{\text{イ}}$

コメント　速さ・時間・距離の関係は小学校 6 年生の内容です.

問題文最後の「小数点以下第 2 位 で 四捨五入」という言い方にはちょっと疑問.

- 小数第 2 位 を 四捨五入　・・・ 四捨五入する桁を示す
- 四捨五入して小数第 1 位 まで 求める　・・・ どの桁まで求めたいかを示す

のどちらかでしょう.

問 30　Ａさんと B さんあわせて 52 本のボールペンを持っている．いま，Ａさんが B さんに自分が持っているボールペンのちょうど $\dfrac{1}{3}$ をあげてもまだ A さんの方が多く，更に 3 本あげると B さんの方が多くなる．Ａさんが初めに持っていたボールペンの本数を求めよ．

〔06 国士舘大〕

解答　Ａさん，B さんの持っているボールペンの数をそれぞれ a, b として，問題の条件を式で表すと次のようになる．

$$a+b=52 \qquad ①$$

$$a-\frac{1}{3}a \ > \ b+\frac{1}{3}a \qquad ②$$

$$a-\frac{1}{3}a-3 \ < \ b+\frac{1}{3}a+3 \qquad ③$$

①より，$b=52-a$.

②に代入して，$\dfrac{2}{3}a>(52-a)+\dfrac{1}{3}a$．これより，$a>39$.　④

また，③に代入すると，$\dfrac{2}{3}a-3<(52-a)+\dfrac{1}{3}a+3$．これより，$a<\dfrac{174}{4}=43.5$.　⑤

④，⑤より，$39<a<43.5$.
a は 3 で割り切れる整数であるから，$a=42$.
すなわち，Ａさんが初めに持っていたボールペンは 42 本.

コメント　またありました．中学入試にもありそうな問題です.

中学から高校に移行してきた 1 次不等式の問題になりますが，範囲が限定されるので解がひとつに定まります.

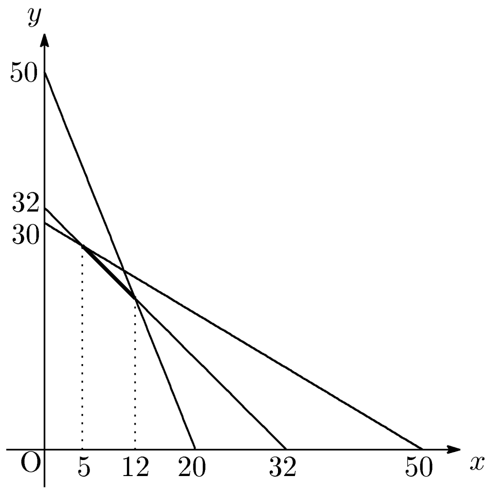
と，上の 2 行は 05 年版のコメントでした．真似した？

問 31　ある期間に 2 種類の製品 X，Y を作って最大の売上高をあげることを計画する．これらの製品を作るには 2 種類の原料 a と b が必要で，それぞれの利用可能な量は，1kg と 1.5kg である．製品 X を 1 個作るには原料 a を 50g，原料 b を 30g 必要とし，製品 Y を 1 個作るには原料 a を 20g，原料 b を 50g 必要とする．この期間に X，Y 合わせてちょうど 32 個作らなければならない．X，Y それぞれ 1 個あたりの価格を 200 円，300 円とする．X の売上高と Y の売上高の合計が最大となる X，Y の個数とそのときの合計の売上高を求めよ．ただし，作った製品は必ず販売されるものとし，それぞれの製品の売上高は価格と販売個数の積で与えられるものとする．

〔立教大・社会〕

解答　X の個数を x，Y の個数を y とすると，条件は次のような式で表せる．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y=32,$$
$$50x+20y \leqq 1000,$$
$$30x+50y \leqq 1500.$$



これらより，

$$5 \leqq x \leqq 12,$$
かつ　$x+y=32.$

この条件のもとで，
$z=200x+300y$
の最大値を求めればよい．

$$z=200x+300(32-x)=-100x+9600$$

となるから，z が最大になるのは x が最小，つまり $x=5$ のときで，
このとき $y=32-5=27$，$z=200\times 5+300\times 27=9100.$

すなわち，X を 5 個，Y を 27 個作り，このときの売上高は 9100 円．

コメント 線形計画法の一般的な解法では，

$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{300}$ のグラフをかき，$5 \leqq x \leqq 12$ の範囲で z の最大値を探す

のですが，この問題では対象となる領域が線分なので，上記のような解答が可能です．

線形計画法としては平易（平凡）な問題ですが，製品や原料をもっと具体的にしてもらえるといいのに．

社会系の学部で出題されていることを考慮しましょう．でも，数学自体が選択科目なので，こんな問題を見たこともない学生がたくさん入学しているのが実情なのでしょうね．

問 32　太一君と竜二君と健三君がお菓子を買いに行った．太一君はチョコを 1 個，ガムを 1 個，アメを 6 個，竜二君はチョコを 2 個，ガムを 3 個，アメを 4 個，健三君はチョコを 3 個，ガムを 5 個，アメを 3 個買い，それぞれ 60 円，90 円，125 円払った．チョコ，ガム，アメのそれぞれ 1 個の値段は，x 円，y 円，z 円であった．

(1) 太一君の買ったお菓子の個数を第 1 行に，竜二君の買ったお菓子の個数を第 2 行に，健三君の買ったお菓子の個数を第 3 行に，また，それぞれのチョコの個数を第 1 列に，ガムの個数を第 2 列に，アメの個数を第 3 列に配列した 3×3 の行列 A を書け．また，その行列を用いて，x, y, z についての連立方程式を表せ．

(2) 行列 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$B = E_1 A$ で与えられる行列 B の第 1 行と第 3 行は A と変わらず，第 2 行は A の第 2 行から，第 1 行の各成分を 2 倍したものを引いたものになっていることを，計算により確かめよ．

(3) 行列 E_2 および C を $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$C = E_3 E_2 B$ を満たす行列 E_3 を求めよ．

(4) 行列 D を $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$D = E_4 C$ を満たす行列 E_4 を求めよ．

(5) (2) から (4) までに現れた行列を用いて，x, y, z を求めよ．

〔高知大・理〕

解 (1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix}$.

(2)　$B = E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

となり，確かめられた．

(3)　$E_2 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -15 \end{pmatrix}$.

$C = E_3 E_2 B$ すなわち，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -15 \end{pmatrix}$ だから，(2) と同様に考え，C と $E_2 B$ を比べると，第 2 行は変わらず，C の第 1 行は $E_2 B$ の第 1 行から第 2 行の各成分を引いたものであり，C の第 3 行は $E_2 B$ の第 3 行から第 2 行の

各成分を 2 倍したものを引いたものになっている．よって，$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

実際，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -15 \end{pmatrix}$ である．

(4) $D = E_4 C$ すなわち，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，(3) と同様に考えると，C と第 3 行は変わらず，第 1 行は C の第 1 行から第 3 行の各成分を 14 倍して引いたものであり，第 2 行は C の第 2 行に第 3 行の各成分を 8 倍して足したものである．よって，$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

実際，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(5) $D = E_4 E_3 E_2 E_1 A$，また，$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix}$ だから，

$$\begin{aligned} E_4 E_3 E_2 E_1 A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= E_4 E_3 E_2 E_1 \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= E_4 E_3 E_2 E_1 \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

コメント　連立方程式を行列で解く方法です．3×3 行列について，積は既知としていますが，逆行列は高校の範囲外です．(2) の説明文が解答のカギ．

解を求めるだけなら，知っている方法で連立方程式を解いてしまえばいいのですが，数学ってそれだけではない．この問題は書いてある説明にしたがって解法を探っていく読解の問題なのでしょう．でも，この問題で解法を一般化するところまではできていません．

掃き出し法を知っていると，多少は解きやすくなるのでしょうか，それともかえって混乱するのでしょうか？