授業で使える大学入試の文章問題

よしだ はじめ

吉　田　一

河合塾 COSMO コース講師

ホームページ：　$\boxed{\text{よしだはじめ数学教育}}$ 検索

http://www.ne.jp/asahi/math.edu/ami/mypage/

cq2h-ysd@asahi-net.or.jp

2009 年 10 月 27 日 ＠ 私学会館

東京私学教育研究所 理数系教科研究会（数学）授業実践報告会

０．自己紹介代わりに

１．いきさつなど

２．現実を扱った数学の大学入試問題選

３．解答・解説・コメント

４．他教科でも

0.1　自己紹介代わり … その１

「よしだはじめ」を並べ換えると，6！= 720 通りありますが，それを全部書き出してみました．順列・組合せの数の大きさが実感できます．

1 よしだはじめ	61 よはじしだめ	121 しよだはじめ	181 しはじよだめ	241 だよしはじめ	301 だはじよしめ
2 よしだはめじ	62 よはじしめだ	122 しよだはめじ	182 しはじよめだ	242 だよしはめじ	302 だはじよめし
3 よしだじはめ	63 よはじだしめ	123 しよだじはめ	183 しはじだよめ	243 だよしじはめ	303 だはじしよめ
4 よしだじめは	64 よはじだめし	124 しよだじめは	184 しはじだめよ	244 だよしじめは	304 だはじしめよ
5 よしだめはじ	65 よはじめしだ	125 しよだめはじ	185 しはじめよだ	245 だよしめはじ	305 だはじめよし
6 よしだめじは	66 よはじめだし	126 しよだめじは	186 しはじめだよ	246 だよしめじは	306 だはじめしよ
7 よしはだじめ	67 よはめしだじ	127 しよはだじめ	187 しはめよだじ	247 だよはしじめ	307 だはめよしじ
8 よしはだめじ	68 よはめしじだ	128 しよはだめじ	188 しはめよじだ	248 だよはしめじ	308 だはめよじし
9 よしはじだめ	69 よはめだしじ	129 しよはじだめ	189 しはめだよじ	249 だよはじしめ	309 だはめしよじ
10 よしはじめだ	70 よはめだじし	130 しよはじめだ	190 しはめだじよ	250 だよはじめし	310 だはめしじよ
11 よしはめだじ	71 よはめじしだ	131 しよはめだじ	191 しはめじよだ	251 だよはめしじ	311 だはめじよし
12 よしはめじだ	72 よはめじだし	132 しよはめじだ	192 しはめじだよ	252 だよはめじし	312 だはめじしよ
13 よしじだはめ	73 よじしだはめ	133 しよじだはめ	193 しじよだはめ	253 だよじしはめ	313 だじよしはめ
14 よしじだめは	74 よじしだめは	134 しよじだめは	194 しじよだめは	254 だよじしめは	314 だじよしめは
15 よしじはだめ	75 よじしはだめ	135 しよじはだめ	195 しじよはだめ	255 だよじはしめ	315 だじよはしめ
16 よしじはめだ	76 よじしはめだ	136 しよじはめだ	196 しじよはめだ	256 だよじはめし	316 だじよはめし
17 よしじめだは	77 よじしめだは	137 しよじめだは	197 しじよめだは	257 だよじめしは	317 だじよめしは
18 よしじめはだ	78 よじしめはだ	138 しよじめはだ	198 しじよめはだ	258 だよじめはし	318 だじよめはし
19 よしめだはじ	79 よじだしはめ	139 しよめだはじ	199 しじだよはめ	259 だよめしはじ	319 だじしよはめ
20 よしめだじは	80 よじだしめは	140 しよめだじは	200 しじだよめは	260 だよめしじは	320 だじしよめは
21 よしめはだじ	81 よじだはしめ	141 しよめはだじ	201 しじだはよめ	261 だよめはしじ	321 だじしはよめ
22 よしめはじだ	82 よじだはめし	142 しよめはじだ	202 しじだはめよ	262 だよめはじし	322 だじしはめよ
23 よしめじだは	83 よじだめしは	143 しよめじだは	203 しじだめよは	263 だよめじしは	323 だじしめよは
24 よしめじはだ	84 よじだめはし	144 しよめじはだ	204 しじだめはよ	264 だよめじはし	324 だじしめはよ
25 よだしはじめ	85 よじはしだめ	145 しだよはじめ	205 しじはよだめ	265 だしよはじめ	325 だじはよしめ
26 よだしはめじ	86 よじはしめだ	146 しだよはめじ	206 しじはよめだ	266 だしよはめじ	326 だじはよめし
27 よだしじはめ	87 よじはだしめ	147 しだよじはめ	207 しじはだよめ	267 だしよじはめ	327 だじはしよめ
28 よだしじめは	88 よじはだめし	148 しだよじめは	208 しじはだめよ	268 だしよじめは	328 だじはしめよ
29 よだしめはじ	89 よじはめしだ	149 しだよめはじ	209 しじはめよだ	269 だしよめはじ	329 だじはめよし
30 よだしめじは	90 よじはめだし	150 しだよめじは	210 しじはめだよ	270 だしよめじは	330 だじはめしよ
31 よだはしじめ	91 よじめしだは	151 しだはよじめ	211 しじめよだは	271 だしはよじめ	331 だじめよしは
32 よだはしめじ	92 よじめしはだ	152 しだはよめじ	212 しじめよはだ	272 だしはよめじ	332 だじめよはし
33 よだはじしめ	93 よじめだしは	153 しだはじよめ	213 しじめだよは	273 だしはじよめ	333 だじめしよは
34 よだはじめし	94 よじめだはし	154 しだはじめよ	214 しじめだはよ	274 だしはじめよ	334 だじめしはよ
35 よだはめしじ	95 よじめはしだ	155 しだはめよじ	215 しじめはよだ	275 だしはめよじ	335 だじめはよし
36 よだはめじし	96 よじめはだし	156 しだはめじよ	216 しじめはだよ	276 だしはめじよ	336 だじめはしよ
37 よだじしはめ	97 よめしだはじ	157 しだじよはめ	217 しめよだはじ	277 だしじよはめ	337 だめよしはじ
38 よだじしめは	98 よめしだじは	158 しだじよめは	218 しめよだじは	278 だしじよめは	338 だめよしじは
39 よだじはしめ	99 よめしはだじ	159 しだじはよめ	219 しめよはだじ	279 だしじはよめ	339 だめよはしじ
40 よだじはめし	100 よめしはじだ	160 しだじはめよ	220 しめよはじだ	280 だしじはめよ	340 だめよはじし
41 よだじめしは	101 よめしじだは	161 しだじめよは	221 しめよじだは	281 だしじめよは	341 だめよじしは
42 よだじめはし	102 よめしじはだ	162 しだじめはよ	222 しめよじはだ	282 だしじめはよ	342 だめよじはし
43 よだめしはじ	103 よめだしはじ	163 しだめよはじ	223 しめだよはじ	283 だしめよはじ	343 だめしよはじ
44 よだめしじは	104 よめだしじは	164 しだめよじは	224 しめだよじは	284 だしめよじは	344 だめしよじは
45 よだめはしじ	105 よめだはしじ	165 しだめはよじ	225 しめだはよじ	285 だしめはよじ	345 だめしはよじ
46 よだめはじし	106 よめだはじし	166 しだめはじよ	226 しめだはじよ	286 だしめはじよ	346 だめしはじよ
47 よだめじしは	107 よめだじしは	167 しだめじよは	227 しめだじよは	287 だしめじよは	347 だめしじよは
48 よだめじはし	108 よめだじはし	168 しだめじはよ	228 しめだじはよ	288 だしめじはよ	348 だめしじはよ
49 よはしだじめ	109 よめはしだじ	169 しはよだじめ	229 しめはよだじ	289 だはよしじめ	349 だめはよしじ
50 よはしだめじ	110 よめはしじだ	170 しはよだめじ	230 しめはよじだ	290 だはよしめじ	350 だめはよじし
51 よはしじだめ	111 よめはだしじ	171 しはよじだめ	231 しめはだよじ	291 だはよじしめ	351 だめはしよじ
52 よはしじめだ	112 よめはだじし	172 しはよじめだ	232 しめはだじよ	292 だはよじめし	352 だめはしじよ
53 よはしめだじ	113 よめはじしだ	173 しはよめだじ	233 しめはじよだ	293 だはよめしじ	353 だめはじよし
54 よはしめじだ	114 よめはじだし	174 しはよめじだ	234 しめはじだよ	294 だはよめじし	354 だめはじしよ
55 よはだしじめ	115 よめじしだは	175 しはだよじめ	235 しめじよだは	295 だはしよじめ	355 だめじよしは
56 よはだしめじ	116 よめじしはだ	176 しはだよめじ	236 しめじよはだ	296 だはしよめじ	356 だめじよはし
57 よはだじしめ	117 よめじだしは	177 しはだじよめ	237 しめじだよは	297 だはしじよめ	357 だめじしよは
58 よはだじめし	118 よめじだはし	178 しはだじめよ	238 しめじだはよ	298 だはしじめよ	358 だめじしはよ
59 よはだめしじ	119 よめじはしだ	179 しはだめよじ	239 しめじはよだ	299 だはしめよじ	359 だめじはよし
60 よはだめじし	120 よめじはだし	180 しはだめじよ	240 しめじはだよ	300 だはしめじよ	360 だめじはしよ

361 はよしだじめ	421 はだじよしめ	481 じよしだはめ	541 じだはよしめ	601 めよしだはじ	661 めだはよしじ
362 はよしだめじ	422 はだじよめし	482 じよしだめは	542 じだはよめし	602 めよしだじは	662 めだはよじし
363 はよしじだめ	423 はだじしよめ	483 じよしはだめ	543 じだはしよめ	603 めよしはだじ	663 めだはしよじ
364 はよしじめだ	424 はだじしめよ	484 じよしはめだ	544 じだはしめよ	604 めよしはじだ	664 めだはしじよ
365 はよしめだじ	425 はだじめよし	485 じよしめだは	545 じだはめよし	605 めよしじだは	665 めだはじよし
366 はよしめじだ	426 はだじめしよ	486 じよしめはだ	546 じだはめしよ	606 めよしじはだ	666 めだはじしよ
367 はよだしじめ	427 はだめよしじ	487 じよだしはめ	547 じだめよしは	607 めよだしはじ	667 めだじよしは
368 はよだしめじ	428 はだめよじし	488 じよだしめは	548 じだめよはし	608 めよだしじは	668 めだじよはし
369 はよだじしめ	429 はだめしよじ	489 じよだはしめ	549 じだめしよは	609 めよだはしじ	669 めだじしよは
370 はよだじめし	430 はだめしじよ	490 じよだはめし	550 じだめしはよ	610 めよだはじし	670 めだじしはよ
371 はよだめしじ	431 はだめじよし	491 じよだめしは	551 じだめはよし	611 めよだじしは	671 めだじはよし
372 はよだめじし	432 はだめじしよ	492 じよだめはし	552 じだめはしよ	612 めよだじはし	672 めだじはしよ
373 はよじしだめ	433 はじよしだめ	493 じよはしだめ	553 じはよしだめ	613 めよはしだじ	673 めはよしだじ
374 はよじしめだ	434 はじよしめだ	494 じよはしめだ	554 じはよしめだ	614 めよはしじだ	674 めはよしじだ
375 はよじだしめ	435 はじよだしめ	495 じよはだしめ	555 じはよだしめ	615 めよはだしじ	675 めはよだしじ
376 はよじだめし	436 はじよだめし	496 じよはだめし	556 じはよだめし	616 めよはだじし	676 めはよだじし
377 はよじめしだ	437 はじよめしだ	497 じよはめしだ	557 じはよめしだ	617 めよはじしだ	677 めはよじしだ
378 はよじめだし	438 はじよめだし	498 じよはめだし	558 じはよめだし	618 めよはじだし	678 めはよじだし
379 はよめしだじ	439 はじしよだめ	499 じよめしだは	559 じはしよだめ	619 めよじしだは	679 めはしよだじ
380 はよめしじだ	440 はじしよめだ	500 じよめしはだ	560 じはしよめだ	620 めよじしはだ	680 めはしよじだ
381 はよめだしじ	441 はじしだよめ	501 じよめだしは	561 じはしだよめ	621 めよじだしは	681 めはしだよじ
382 はよめだじし	442 はじしだめよ	502 じよめだはし	562 じはしだめよ	622 めよじだはし	682 めはしだじよ
383 はよめじしだ	443 はじしめよだ	503 じよめはしだ	563 じはしめよだ	623 めよじはしだ	683 めはしじよだ
384 はよめじだし	444 はじしめだよ	504 じよめはだし	564 じはしめだよ	624 めよじはだし	684 めはしじだよ
385 はしよだじめ	445 はじだよしめ	505 じしよだはめ	565 じはだよしめ	625 めしよだはじ	685 めはだよしじ
386 はしよだめじ	446 はじだよめし	506 じしよだめは	566 じはだよめし	626 めしよだじは	686 めはだよじし
387 はしよじだめ	447 はじだしよめ	507 じしよはだめ	567 じはだしよめ	627 めしよはだじ	687 めはだしよじ
388 はしよじめだ	448 はじだしめよ	508 じしよはめだ	568 じはだしめよ	628 めしよはじだ	688 めはだしじよ
389 はしよめだじ	449 はじだめよし	509 じしよめだは	569 じはだめよし	629 めしよじだは	689 めはだじよし
390 はしよめじだ	450 はじだめしよ	510 じしよめはだ	570 じはだめしよ	630 めしよじはだ	690 めはだじしよ
391 はしだよじめ	451 はじめよしだ	511 じしだよはめ	571 じはめよしだ	631 めしだよはじ	691 めはじよしだ
392 はしだよめじ	452 はじめよだし	512 じしだよめは	572 じはめよだし	632 めしだよじは	692 めはじよだし
393 はしだじよめ	453 はじめしよだ	513 じしだはよめ	573 じはめしよだ	633 めしだはよじ	693 めはじしよだ
394 はしだじめよ	454 はじめしだよ	514 じしだはめよ	574 じはめしだよ	634 めしだはじよ	694 めはじしだよ
395 はしだめよじ	455 はじめだよし	515 じしだめよは	575 じはめだよし	635 めしだじよは	695 めはじだよし
396 はしだめじよ	456 はじめだしよ	516 じしだめはよ	576 じはめだしよ	636 めしだじはよ	696 めはじだしよ
397 はしじよだめ	457 はめよしだじ	517 じしはよだめ	577 じめよしだは	637 めしはよだじ	697 めじよしだは
398 はしじよめだ	458 はめよしじだ	518 じしはよめだ	578 じめよしはだ	638 めしはよじだ	698 めじよしはだ
399 はしじだよめ	459 はめよだしじ	519 じしはだよめ	579 じめよだしは	639 めしはだよじ	699 めじよだしは
400 はしじだめよ	460 はめよだじし	520 じしはだめよ	580 じめよだはし	640 めしはだじよ	700 めじよだはし
401 はしじめよだ	461 はめよじしだ	521 じしはめよだ	581 じめよはしだ	641 めしはじよだ	701 めじよはしだ
402 はしじめだよ	462 はめよじだし	522 じしはめだよ	582 じめよはだし	642 めしはじだよ	702 めじよはだし
403 はしめよだじ	463 はめしよだじ	523 じしめよだは	583 じめしよだは	643 めしじよだは	703 めじしよだは
404 はしめよじだ	464 はめしよじだ	524 じしめよはだ	584 じめしよはだ	644 めしじよはだ	704 めじしよはだ
405 はしめだよじ	465 はめしだよじ	525 じしめだよは	585 じめしだよは	645 めしじだよは	705 めじしだよは
406 はしめだじよ	466 はめしだじよ	526 じしめだはよ	586 じめしだはよ	646 めしじだはよ	706 めじしだはよ
407 はしめじよだ	467 はめしじよだ	527 じしめはよだ	587 じめしはよだ	647 めしじはよだ	707 めじしはよだ
408 はしめじだよ	468 はめしじだよ	528 じしめはだよ	588 じめしはだよ	648 めしじはだよ	708 めじしはだよ
409 はだよしじめ	469 はめだよしじ	529 じだよしはめ	589 じめだよしは	649 めだよしはじ	709 めじだよしは
410 はだよしめじ	470 はめだよじし	530 じだよしめは	590 じめだよはし	650 めだよしじは	710 めじだよはし
411 はだよじしめ	471 はめだしよじ	531 じだよはしめ	591 じめだしよは	651 めだよはしじ	711 めじだしよは
412 はだよじめし	472 はめだしじよ	532 じだよはめし	592 じめだしはよ	652 めだよはじし	712 めじだしはよ
413 はだよめしじ	473 はめだじよし	533 じだよめしは	593 じめだはよし	653 めだよじしは	713 めじだはよし
414 はだよめじし	474 はめだじしよ	534 じだよめはし	594 じめだはしよ	654 めだよじはし	714 めじだはしよ
415 はだしよじめ	475 はめじよしだ	535 じだしよはめ	595 じめはよしだ	655 めだしよはじ	715 めじはよしだ
416 はだしよめじ	476 はめじよだし	536 じだしよめは	596 じめはよだし	656 めだしよじは	716 めじはよだし
417 はだしじよめ	477 はめじしよだ	537 じだしはよめ	597 じめはしよだ	657 めだしはよじ	717 めじはしよだ
418 はだしじめよ	478 はめじしだよ	538 じだしはめよ	598 じめはしだよ	658 めだしはじよ	718 めじはしだよ
419 はだしめよじ	479 はめじだよし	539 じだしめよは	599 じめはだよし	659 めだしじよは	719 めじはだよし
420 はだしめじよ	480 はめじだしよ	540 じだしめはよ	600 じめはだしよ	660 めだしじはよ	720 めじはだしよ

拙作，入力した文字の順列・組合せのパターンをすべて作りだすソフト **JK** for windows による出力です．解説とともにホームページで公開しています．

0.2　自己紹介代わり … その２

河合塾コスモコース発行 保護者・学校向け COSMO News　Vol.23, 2008.4 月号より.

シリーズ　コスモが目指す学力Ⅳ

受験学力を超えて

１．体系的な知識と自己認識を

「子どもの学力が低下した」と言われています．私は「学力」の問題以前に,「学習する」あるいは「勉強する」ことの意味が非常に狭く考えられているのではないかと思います.

小学生には定期試験はありません．この時代には何かを知り，何かができるようになることそれ自体が学習の目的です．中学生になると定期試験があります．その前に中学受験という人もあったでしょう．すると，試験でよい成績をとるために一所懸命「勉強」することになります．このあたりで勉強の目的と手段が入れ替わり「勉強とは来るべき試験でよい成績をとるためにする行為である」と誤解してしまう人が増えるようです.

それでも範囲の決まっている中学・高校の定期試験や高卒認定試験程度なら点数を取るのはさほど難しくはないでしょう．だから，解法を覚え込むという試験前の対策的な学習でなんとかなってしまう．ところが，大学入試はそうはいきません．大学入試の範囲が「数学Ｉ」とは「数学Ｉまでの範囲で解ける問題」という意味です．中学校までの範囲ももちろん含みます．それまでに学習した範囲すべての知識と方法を用いて解きます．単独の知識で解けることはごくわずかで，それらが有機的に結びついた体系的な知識になっていないと対処できなくなります．単に知識の多少の問題ではないのです.

料理に例えてみます．高校の定期試験の問題は「キャベツを千切りにしろ」,「じゃがいもを茹でろ」といった下ごしらえの課題です．大学入試問題は「野菜炒めを作れ」,「肉じゃがを作れ」のような料理を作る課題です．上位の課題を自分で下位の課題に分解し，それらを組み合わせて解決しなければなりません．高校の定期試験や高卒認定試験と大学入試の「レベルが違う」とはこういうことです．大学ではさらに「予算いくらで献立を考えろ」のように発展します．このような課題レベルの差を自己認識して学習することが必要です．そして，それは大学の学習やその後の社会での業務にも欠かせないものとなります.

２．現実と数学の行き来が必要

「小学校の算数なら生活の役に立つけれど，数学は何の役に立つの」などとよく言われます．それは中学，高校の一般的な数学の授業のイメージからくるのでしょう.

たとえば，体育の授業でサッカーをするとしましょう．ゲームのルールを覚え，パスやドリブルなどの基礎練習をした後，初心者もそれなりにゲームを行います．音楽でも楽譜の読み方を学び，楽器の音の出し方を練習したら，曲の演奏をします．ところが，数学の学習では定理や公式を理解し，確認の問題を解いて終わるのが普通です.「それ以上何をするの？」とさえ言われそうです.

数学で，体育でのゲームや音楽での演奏に相当するのは，最近「活用」と言われ出したことです．現実的な問題に数学を適用して解くという問題で，概して問題は長文です．国際学力調査や全国学力調査があり，「読解力」や「活用力」が不足しているという結果が出ました．確かに，与えられた方程式は解けても，文章を読解して方程式をたてられない生徒が多いと感じます．新しい学習指導要領ではこれらを強化するようです．しかし，

基礎： 定理や公式を理解すること
活用： 現実問題に適用すること

として，基礎と活用を別物と考えることは間違いです．数学の定理や公式が天下り的に存在して，それを現実に適用するわけではないのです．もともと定理や公式は現実を観察し，仮説をたて，それを確認・証明することで生まれました．活用抜きでは基礎を理解したことにはなりません．

たとえば，中学校で学んだピタゴラスの定理（三平方の定理／「直角三角形で，斜辺の長さの二乗は他の二辺の二乗の和に等しい」という定理）が生まれてきた背景には土地の測量などの現実の問題を解決するという用途がありました．現実の中の数理的な現象から数学は生まれ，定式化された数学が再度現実に適用されます．つまり，

現実 → 数学 → 現実 → 数学 →

というサイクルができます．高校数学の大部分は現実と関わりのある内容です．微積分はその最たるもので，物体の運動の解析から生まれましたが，経済学や社会科学などさまざまな量の変化を扱う科学に欠かせないものとして，理系文系の区別なく利用されています．

３．文化としての数学の鑑賞も

数学は人類が創りあげてきた文化のひとつです．たとえ数学が受験科目でなくても，いや，受験科目でないならこそ，文学や芸術作品を鑑賞するように，たまには数学を鑑賞してみるのもすてきなことです．

民族，文化によって微妙に異なる数学が生まれたこともありました．独自に同じ内容の発見が別々になされたこともありました．論理と多少の計算は必要ですが，毛嫌いせずに数学を鑑賞できることも，数学の学力の一種ではないでしょうか．

1　序

1.1　いきさつ

数学の入試問題といったら，ほとんどは無味乾燥．受験生か教師でもなければ問題を見ても何のことやらちんぷんかんぷん．受験生にしても,「解けたからって，試験に受かる以外何の役に立つの？」って思ってもしかたない．しかし，なかには少数ながら，

現実にありそうな状況の問題

もあります．つまり，問題を解く状況や意味が明確になっている問題です．そんな問題を集めてみました．とはいえ，集めるのに困るほど少ない．選ぶのに困るほど多くなってほしいものです．作るほうはたいへんだろうと思いますが.（2003.8.11）

こんな序文とともに，このような問題の収集と解答・解説を始めました．

コメントは当初教師向けのつもりで書いていました．しかし，問題を教材として生徒にも配ったため，生徒を意識して書いたところもあります．そういうわけで，コメントの記述には統一がとれていません．

問題の傾向と出題する大学とがだんだんわかってきました．いわゆる「有名大学」で小・中学校の内容が問われることが目立っています．このことは,

- このような問題ができない大学生・受験生が少なからずいる．
- 大学は学生・受験生に対して，このような問題ができてほしいと思っている．

ことを示しています.

PISA および TIMSS 国際学力調査の結果では，特に「読解力」の弱さが指摘されています．適切な図表・グラフを活用する能力も問われています．ここに収録したような入試問題の多くは「読解力」を試す問題として有用であり，私たちはこれらを題材にして授業を行うことができるでしょう．実際，いくつかの問題は私の授業で取り上げました．

しかし，このような問題が無条件に「良い」問題とは限りません．批判的に検討する必要があります．また，抽象的でも（抽象的だからこそ）良い問題もあります．

生徒には，単に「受験対策」としてのみの目的で学ぶのではなく，数学が現実に適用されるイメージを持ってもらいたいものです．同時に，出題する側にも内容を吟味した問題になることを期待します.

1.2 問題一覧表

No.	分類	内容	数学分野	年度	大学	学部・学科	
1	大学入試の算数	リンゴ配り	不等式	05	共立女子	家政	
2		平均点	方程式	04	立教	経,法	
3		集金	不等式	07	摂南	法,外国語	
4		物価の変動	方程式	08	愛知		
5	社会派問題	貯水量	方程式	03	立命館	政策科学	
6		借金返済	数列	06	芝浦工	工	
7		政党の選挙共闘	組合せ	05	慶応	総合政策	
8	数値感覚を大切に	ロープで囲む面積	二次関数	03	岐阜	工	
9		円形プールを測る	三角比	03	鳥取	工	
10		暗証番号を当てる	確率	06	関東学院	文,経	
11		七番勝負の試合数	期待値	06	福岡	経,商	
12	理科的問題	人工衛星から見た地球	三角比	08	関西大	ｼｽﾃﾑ理工他	
13	似たもの同士	追いつけ追い越せ 1	方程式	06	専修	ﾈｯﾄﾜｰｸ情報	
14		追いつけ追い越せ 2	方程式	07	青山学院	経	解答略
15		視角が最大 1	三角関数	08	千葉	理	
16		視角が最大 2	三角関数	03	信州	理,医	解答略
17	もっと微積分で	缶と金属板	微積分	03	信州	繊維	
18	パズル	コイン詰め	幾何	06	東洋	文(文系)	
19		おかしな約分	整数	03	滋賀	教育	

1 大学入試の算数
「これが大学入試？」文体を変えれば高校入試や中学入試でもいいような，小学校の範囲でも解けそうな問題です．

2 社会派問題
問題を理解するには，社会的背景の知識も必要でしょう．

3 数値感覚を大切に
数学の問題の解答としてはよくても，実際に適用するには不適当ではありませんか．

4 理科的問題
意外と少ないのです．

5 似たもの同士
真似したわけではないのでしょうが，よく似た問題が出題されています．

6 もっと微積分で
現実に関わる分野といえば微積分ですが，おもしろい問題は多くありません．

7 パズル
楽しみましょう．といっても，実際の試験では楽しめないかも．

他，問題だけ収録 13 問．

2　問題編

2.1　大学入試の算数

問 1　子ども達にリンゴを配る．1 人 4 個ずつにすると 19 個余るが，1 人 7 個ずつにすると，最後の子どもは 7 個より少なくなる．このときの子どもの人数とリンゴの個数を求めよ．ただし子どもの人数は偶数である．

〔05 共立女子大・家政〕

問 2　受験者全員の平均点が 60 点である試験において，合格基準点を $\boxed{}$ 点と定めると，受験者の 75% が合格者で，その平均点は合格基準点より 15 点高く，不合格者の平均点は，合格基準点より 25 点低くなる．

〔04 立教大・経，法〕

問 3　Ｓ大学Ｙクラブの４年生が卒業記念品を購入することになった．１人あたり 3000 円集めると記念品を購入するのに必要な額より 6000 円不足し，3400 円ずつ集めると必要額を 1000 円以上超過する．顧問の先生から１万円の寄付がある場合には，１人あたり 2800 円ずつ集めると必要額を 300 円以上超過する．

Ｓ大学Ｙクラブの４年生は $\boxed{\text{ア}}$ 人おり，記念品を購入するのに必要な金額は $\boxed{\text{イ}}$ 万円である．

〔07 摂南大・法，外国語，経営情報〕

問 4　ある年のキャベツの販売量は，前年に比べて 20 %の増加であった．しかし，キャベツの価格が下落したために，売上高（価格×販売量）は結果として前年比 10 %の減少となってしまった．つまり，キャベツの価格は $\boxed{}$ %下落したことになる．

〔08 愛知大〕

2.2 社会派問題

問 5 現在の貯水量が $a\,(\mathrm{m}^3)$ である貯水池に毎日一定量 $x\,(\mathrm{m}^3)$ の水が流入する一方で，毎日一定量 $y\,(\mathrm{m}^3)$ の水が流出しており，その結果，今から 60 日後にこの貯水池は空になるという．この仮定のもとで初めから 20 日後に別の水源から毎日一定量 $z\,(\mathrm{m}^3)$ の供給があれば，貯水池が空になる期限を 40 日だけ先にのばすことができるという．

このとき，貯水池の水量についてこれらの関係を式で表すと，

$$a + \boxed{\text{ア}}\,x = \boxed{\text{ア}}\,y$$
$$a + \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,z = \boxed{\text{エ}}\,y$$

となる．よって $z = \dfrac{a}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

したがって，初めからこの供給があれば，この貯水池が空になる期限を $\boxed{\text{カ}}$ 日だけ先にのばすことができる．

〔03 立命館大・政策科学〕

問 6 A 円をある年の初めに借り，その年の終わりから同額ずつ n 回で返済する．年利率を $r\ (>0)$ とし，1 年ごとの複利法とすると毎回の返済金額は $\boxed{}$ である．

預金など，1 年が経過するごとに利率 r で利息を元金に繰り入れることを複利法という．

〔06 芝浦工大・工〕

問 7 ある国にはA, B, C, D, Eの 5 つの政党がある．選挙に際して各政党は共闘を模索するが，その場合の数を考えてみよう．ただし，E党はA党ともB党とも共闘しない．また，共闘は次のように解釈する．X党はX党自身と共闘であり，X党がY党と共闘し，Y党がZ党と共闘すれば，X党はZ党とも共闘である．このような状況でどれだけの共闘のパターンがあるか数え上げてみる．

E党が単独で選挙戦に臨んだとき，残りの 4 党の共闘パターンは $\boxed{\text{ア}}$ 通りである．E党がC党とだけ共闘した場合は $\boxed{\text{イ}}$ 通りであり，E党がD党とだけ共闘した場合は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである．またE党がC党とD党と共闘した場合は $\boxed{\text{エ}}$ 通りである．したがって選挙戦におけるすべての共闘パターンは $\boxed{\text{オ}}$ 通りである．

〔05 慶応大・総合政策〕

2.3　数値感覚を大切に

問 8　長さ L のロープを用いて長方形の囲いを作りたい．短辺の長さを x として

(1) 囲いの内部の面積 S を求めよ．

(2) x と S との関係のグラフをかき，S が最大値 S_{max} をとる点をそのグラフ中にに示せ．

(3) 囲いの形状を円とした場合の内部の面積を A とする．面積比 $\dfrac{A}{S_{max}}$ を求めよ．

〔03 岐阜大・工（2 部）〕

問 9　近くの公園に円形のプールがある．ある日，このプールの広さを測定しようと考え，私と友人は巻尺とチョークを持って出かけた．プールの縁の 3 か所にチョークで印を付け，それぞれを A，B，C とした．AB，BC，CA の水平距離を測定すると，それぞれ $9\,\mathrm{m}, 6\,\mathrm{m}, 12\,\mathrm{m}$ であった．

(1) $\angle$ABC の正弦，余弦，正接の値を求めよ．

(2) $\triangle$ABC の面積を求めよ．

(3) このプールの面積を求めよ．

〔03 鳥取大・工（後期）〕

問 10　銀行の暗証番号について，次の問いに答えよ．ただし，暗証番号は数字 0 〜 9 の任意の 4 桁の組み合わせで，数字は重複を許し，先頭の数字に 0 を使っても構わないものとする．

(1) 何の知識もない場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

(2) 4 桁のどこかに数字 9 が使われていることだけがわかっている場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

(3) 4 桁のどこかに数字 2 と 8 が使われていることだけがわかっている場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

(4) 4 桁のどこかに数字 7 が 2 個使われていることだけがわかっている場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

〔06 関東学院大・文，経〕

問 11　AとBの 2 つのチームが試合を行い，先に 4 勝したチームを優勝とする．AがBに勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．このとき，ちょうど 6 試合目でAが優勝する確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，優勝が決定するまでに行われる試合数の期待値は $\boxed{\text{イ}}$ 試合である．

〔06 福岡大・経，商〕

2.4　理科的問題

問 12　地上 $x$km の位置に静止している人工衛星から地球を見ると，地球は半径が $\boxed{}$ km の円板に見える．ただし，地球は半径が Rkm の球とする．

〔08 関西大・システム理工，環境都市工，化学生命工〕

2.5　似たものどうし

問 13　A, B, C の 3 台の車が同一地点から同一方向に異なる時刻にスタートした．A が出発して 90 分後に B が出発し，B が出発して 90 分後に C が出発した．C は出発して 3 時間後に A に追いつき，6 時間後に B に追いついた．3 台の車の速度がそれぞれ一定であったとすると，B が A に追いついたのは，B が出発してから何時間後か．

〔06 専修大・ネットワーク情報〕

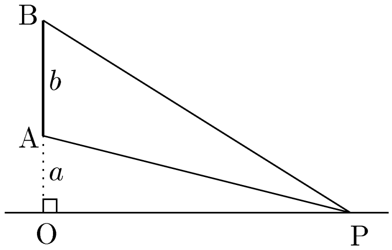
問 14　同じ方向にそれぞれ一定の速度で飛行する 3 つの物体 α, β, γ がある．α がある位置 P を通過した 5 秒後に P を通過した β は，P を通ってから 10 秒後に α を追い越した．β より更に 10 秒遅れて P を通過した γ は，その 15 秒後に α を追い越した．γ が β に追いつくのは，γ が P を通過した何秒後か．

〔07 青山学院大・経〕

問 15　地上にいる人が，高さ 200m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50m の鉄塔を見る．鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか．ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する．

〔08 千葉大・理（後期）〕

問 16　図のように地面上の点 O の真上に長さ b の棒 AB が地面に垂直になるようにつるしてあり，その下端 A は地面から高さ a のところにある．ただし，$a > 0$ とする．この棒を地面上を動く点 P から観察する．このとき，∠BPA が最大になる点 P に対し OP の長さを求めよ．なお，地面は水平面とみなす．



〔03 信州大・理，医〕

2.6 もっと微積分で

問 17 円柱形の缶を金属板で作りたい（缶は両端とも金属板のフタで閉じている）．缶の容積を一定とした場合に，缶の製作に要する金属板を最小で済ませるには，底面の直径 d と高さ h との比をどのようにすればよいか．その比を求めよ．ただし，金属板の厚さは無視できるものとする．

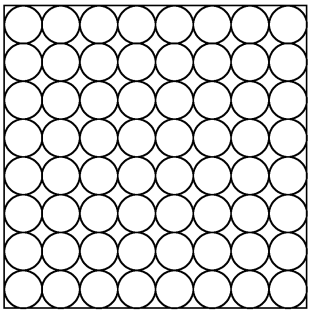
〔03 信州大・繊維〕

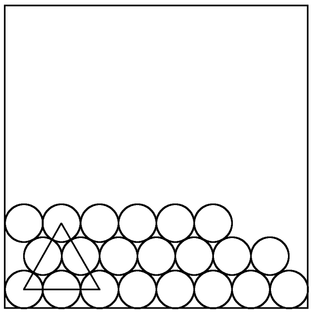
2.7 パズル

問 18 初めに下の左の図のように，1 辺 8 の正方形の箱の中に直径 1 のコインが 64 個入っている．次に右の図のように，この箱に同じ直径 1 のコインを下からなるべくたくさん詰め込んでいく．

(1) 右の図に示した，コインの中心を結んだ正三角形の高さは $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) この方法では，最大 $\boxed{\text{イ}}$ 段まで詰め込むことができ，その高さは $\boxed{\text{ウ}}$ である．このとき，箱の中にはコインが全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個入っている．





〔06 東洋大・文系〕

問 19 ある子供が分数 $\dfrac{16}{64}$ を簡単にしようとして，分母と分子に同じ数 6 があるので，それを斜線で消し $\dfrac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \dfrac{1}{4}$ とした．結果だけをみれば正しいが，いつもこうはうまくいかない．a,b,c を 1 から 9 までの異なる整数として，$\dfrac{10a+b}{10b+c}$ を上のように処理した結果 $\dfrac{a}{c}$ がもとの分数と等しいとき，もとの分数を $\dfrac{16}{64}$ 以外すべて求めよ．

〔03 滋賀大・教育〕

2.8　問題だけいろいろ

問 20　A市の人口は近年増加傾向にある．現在，A市の人口は前年同時期の人口と比べて 8% 増加している．毎年この比率で増加するとした場合，人口が現在の 4 倍を超えるのは $\boxed{}$ 年後である．

$\boxed{}$ に適当な整数を入れよ．また $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ．

〔06 立命館大・文系〕

問 21　$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．$\log_{10} 98$ を計算すると $\boxed{\text{ア}}$ である．

さて，ある国の人口が 1 年間に 2 %の割合で減少し続けるとすると，n 年後には，この国の人口が初めて現在の人口の 50 %未満となる．この整数 n を求めると $n = \boxed{\text{イ}}$ である．

〔07 南山大・数理情報〕

問 22　A国の人口は現在 1 億人であるが，今後 5 年間は年 2 %の減少，それ以後は年 1 %の減少が見込まれている．A国の人口がはじめて 6000 万人未満になるのは何年後と考えられるか．自然数で答えよ．

ただし，右の表を必要に応じて使用してよい．

$\log_{10} 2$	0.3010
$\log_{10} 3$	0.4771
$\log_{10} 5$	0.6990
$\log_{10} 7$	0.8451
$\log_{10} 11$	1.0414

〔08 名古屋市大・医〕

問 23　ある微生物は一定時間ごとに 1 回分裂して，個数が 2 倍に増えていく．この微生物 1 個を観察ケースに入れた．この微生物が観察途中で死ぬことなく増えていくとき，次の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) この微生物が 12 回分裂したときの，観察ケース内の微生物の個数を求めよ．

(2) 観察ケース内の微生物が初めて 100 万個以上になるのは，何回分裂したときか．

(3) 観察開始から 6 回の分裂を経るたびに，瞬時に微生物の個数を数えた後で，観察ケース内の微生物の半数を取り除くものとする．このとき，観察ケース内の微生物が初めて 100 万個以上になるのは，何回分裂した直後か．

〔08 岩手大・農〕

問 24　200X 年 9 月 1 日午後 6 時に，ある台風の中心が鹿児島県鹿児島市（北緯 31.6 度，東経 130.6 度）に上陸した．この台風は，時速 20km で真北に向かって進んでおり，中心から半径 70km の円内が暴風域になっていると仮定する．

台風の勢力・速度・進行方向が変わらない場合，山口県下関市（北緯 34.0 度，東経 131.0 度）が暴風域に入る日時を答えよ．時刻は四捨五入して分単位で表せ．

なお，緯度 1 度あたりの距離を 110km，北緯 30 度から北緯 35 度の範囲内での経度 1 度あたりの距離を 90km とし，問題となっている区域は平面であると仮定する．

〔05 成城大・法〕

問 25　半径 170km の暴風圏をもつ台風が，真北に向かって時速 20km の速さで進んでいるとき，台風の中心から真東に 230km 離れた洋上を，時速 20km で真西に進んでいる船があるとする．台風の勢力は当分の間変化せず，したがって暴風圏も当分の間変わらないとする．更に，この船は台風に影響されずに同じ速度で進むとする．このとき，この船が暴風圏に入るのは今から $\boxed{\text{ア}}$ 時間後であり，暴風圏に入ってから $\boxed{\text{イ}}$ 時間後に暴風圏を抜け出す．

〔06 摂南大・工〕

問 26　A さんが B さんに対して裁判を起こすと，10 ％の確率で 1 億円，20 ％の確率で 5000 万円，30 ％の確率で 2000 万円を B さんから得られるが，40 ％の確率で何も得られないとする．

(1) A さんの弁護士は，裁判で A さんが B さんから得た金額の 20 ％を報酬として得ることができる．この弁護士の報酬の期待値を求めよ．

(2) この裁判で A さんが B さんから何も得られない場合にだけ，B さんの弁護士は，B さんから報酬を得ることができる．弁護士の報酬の期待値は，どちらも等しいとすると，B さんが弁護士に支払う報酬の金額を求めよ．

(3) B さんは A さんに対して 2000 万円を支払うことで，A さんが B さんに対する裁判を起こさずに解決することを提案した．裁判を起こさなかった場合，どちらの弁護士にも報酬は支払われない．裁判を起こした場合，A さんが得る金額の期待値と弁護士に支払う報酬だけを考えて，B さんの提案を受け入れることは A さんにとって有利であるか，根拠を示して答えよ．

〔08 福井県大（後期）〕

問 27　図１のような円柱がある．この円柱に，１本の紙テープを重ならないように巻きつけて，側面をおおい，はみ出した部分のテープを切り取ると，図２のようになった．ただし，円柱の底面の直径を d，高さを h とし，テープの幅を a とする．

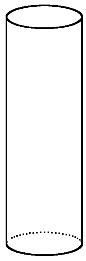
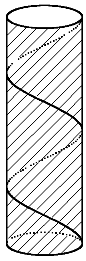
図１


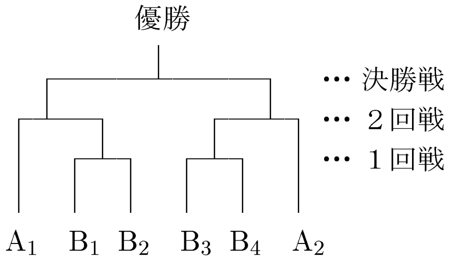
図２


(1) 図２で円柱に巻かれているテープの面積を求めよ．

(2) 円柱に巻かれていたテープをほどいて平らにしたとき，どんな図形になるか．図で示し，大きさがわかるように，必要な長さをすべて記入せよ．

〔岩手大・人文社会科学〕

問 28　6 名の選手 A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4 が図のような組合せのトーナメント方式で戦う．



ただし，引き分けはなく，どちらか一方のみが勝ち上がるものとする．ここで，A_1，A_2 の実力は対等であり，B_1，B_2，B_3，B_4 の実力も対等であるが，$A_i\,(i=1,2)$ と $B_j\,(j=1,2,3,4)$ の対戦では，A_i が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$ である．

このとき，B_1 が決勝戦に進出する確率を求めよ．また，B_1 が優勝する確率を求めよ．

〔05 立教大・理〕

問 29　A 地点から B 地点を経由して C 地点へと移動する．A から B までは下り坂のため，平均速度 90km/h で進めたが，B から C は上り坂のために平均速度 60km/h でしか進めなかった．また，A から C まで全体で考えた場合，平均速度は 75km/h であった．このとき，AB，BC 間のそれぞれの距離の比は $\boxed{\text{ア}}$ である．
一方，帰り道は反対に AB 間を 60km/h，BC 間を 90km/h で進んだ．このとき，C から B までの平均速度は $\boxed{\text{イ}}$ km/h となる（小数点以下第２位で四捨五入）．

〔08 愛知大〕

問 30　A さんと B さんあわせて 52 本のボールペンを持っている．いま，A さんが B さんに自分が持っているボールペンのちょうど $\dfrac{1}{3}$ をあげてもまだ A さんの方が多く，更に 3 本あげると B さんの方が多くなる．A さんが初めに持っていたボールペンの本数を求めよ．

〔06 国士舘大〕

問 31　ある期間に 2 種類の製品 X，Y を作って最大の売上高をあげることを計画する．これらの製品を作るには 2 種類の原料 a と b が必要で，それぞれの利用可能な量は，1kg と 1.5kg である．製品 X を 1 個作るには原料 a を 50g，原料 b を 30g 必要とし，製品 Y を 1 個作るには原料 a を 20g，原料 b を 50g 必要とする．この期間に X，Y 合わせてちょうど 32 個作らなければならない．X，Y それぞれ 1 個あたりの価格を 200 円，300 円とする．X の売上高と Y の売上高の合計が最大となる X，Y の個数とそのときの合計の売上高を求めよ．ただし，作った製品は必ず販売されるものとし，それぞれの製品の売上高は価格と販売個数の積で与えられるものとする．

〔05 立教大・社会〕

問 32　太一君と竜二君と健三君がお菓子を買いに行った．太一君はチョコを 1 個，ガムを 1 個，アメを 6 個，竜二君はチョコを 2 個，ガムを 3 個，アメを 4 個，健三君はチョコを 3 個，ガムを 5 個，アメを 3 個買い，それぞれ 60 円，90 円，125 円払った．チョコ，ガム，アメのそれぞれ 1 個の値段は，x 円，y 円，z 円であった．

(1) 太一君の買ったお菓子の個数を第 1 行に，竜二君の買ったお菓子の個数を第 2 行に，健三君の買ったお菓子の個数を第 3 行に，また，それぞれのチョコの個数を第 1 列に，ガムの個数を第 2 列に，アメの個数を第 3 列に配列した 3×3 の行列 A を書け．また，その行列を用いて，x, y, z についての連立方程式を表せ．

(2) 行列 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$B = E_1 A$ で与えられる行列 B の第 1 行と第 3 行は A と変わらず，第 2 行は A の第 2 行から，第 1 行の各成分を 2 倍したものを引いたものになっていることを，計算により確かめよ．

(3) 行列 E_2 および C を $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$C = E_3 E_2 B$ を満たす行列 E_3 を求めよ．

(4) 行列 D を $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$D = E_4 C$ を満たす行列 E_4 を求めよ．

(5) (2) から (4) までに現れた行列を用いて，x, y, z を求めよ．

〔04 高知大・理〕

3　解答・解説編

問 1　子ども達にリンゴを配る．1 人 4 個ずつにすると 19 個余るが，1 人 7 個ずつにすると，最後の子どもは 7 個より少なくなる．このときの子どもの人数とリンゴの個数を求めよ．ただし子どもの人数は偶数である．

〔05 共立女子大・家政〕

解答　子どもの数を m，リンゴの数を n とする．

$$4m + 19 = n,$$
$$0 < n - 7(m-1) < 7.$$

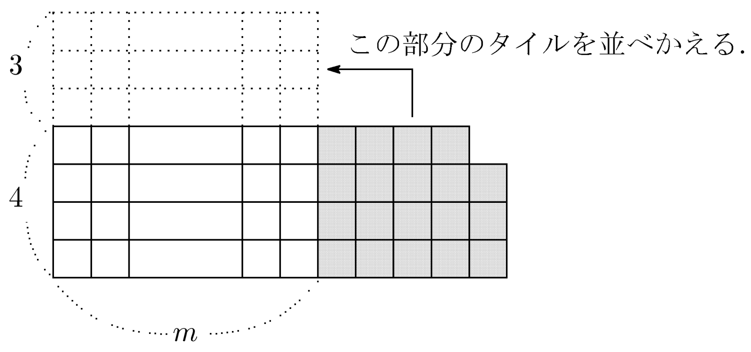
これより，

$$\begin{aligned} 0 &< (4m+19) - 7(m-1) < 7 \\ 0 &< -3m + 26 < 7 \\ -26 &< -3m < -19 \\ 26 &> 3m > 19. \end{aligned}$$

これを満たす偶数の m は，$m = 8$ で，このとき，$n = 51$．すなわち，
子どもは 8 人，リンゴは 51 個．

コメント　ことしもあった小学生でもできそうな (?) 問題です．中学から高校に移行してきた 1 次不等式の問題になりますが，範囲が限定されるので解がひとつに定まります．

タイルを並べて次のように考えることができます．



m を超えた分のタイルを移動させると，下限は，$19 < 3m$．
もう 1 列分移動させると，上限は，$3(m-1) < 19 + 4$．これより，$3m < 26$．
これで，上の代数的な解法と同じ不等式ができます．

問 2　受験者全員の平均点が 60 点である試験において，合格基準点を $\boxed{}$ 点と定めると，受験者の 75% が合格者で，その平均点は合格基準点より 15 点高く，不合格者の平均点は，合格基準点より 25 点低くなる．

〔04 立教大・経，法〕

解答　受験者全体の人数を n 人，合格基準点を x 点とする．受験者全体の総得点は次の 2 通りで表せる．

① 総得点＝全体の平均点×全体の人数　より，$60_{\,[点/人]} \times n_{\,[人]} = 60n_{\,[点]}$.

② 総得点＝ (合格者の平均点×合格者の人数) ＋ (不合格者の平均点×不合格者の人数) より，

$$\begin{aligned} &\big((x+15)_{\,[点/人]} \times 0.75n_{\,[人]}\big) + \big((x-25)_{\,[点/人]} \times 0.25n_{\,[人]}\big) \\ =&\,(0.75nx + 11.25n)_{\,[点]} + (0.25nx - 6.25n)_{\,[点]} \\ =&\,(nx+5n)_{\,[点]} = (x+5)n_{\,[点]}. \end{aligned}$$

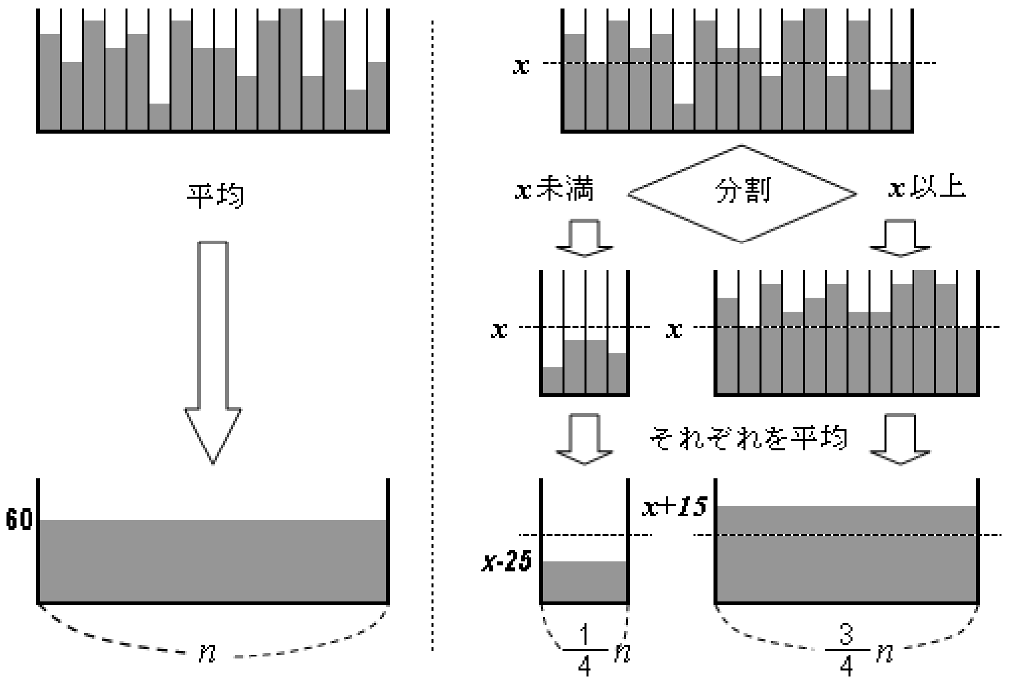
①, ②は等しいから，$60n = (x+5)n$ より，$x = 55_{\,[点]}$.

コメント　上の解答の式には「単位」を付けました.「平均点」とは「均(なら)したときの一人あたりの点数」ですから，これに付ける単位はタダの [点] よりも，[点/人] が適当です.

$$平均点_{[点/人]} = \frac{点数の総和_{[点]}}{人数_{[人]}}$$

で，単位も分数の形式で表せます．速さの単位 [m/秒] などと同じ形式です.

平均は小学校 6 年生で学びます．下の図はそのときによく使われるもので,「均す」イメージを仕切りを外すと高さが一様になる水槽で表しています．左が①（全体の平均）, 右が②（分割したそれぞれの平均）を表しています.



問 3　Ｓ大学Ｙクラブの４年生が卒業記念品を購入することになった．１人あたり 3000 円集めると記念品を購入するのに必要な額より 6000 円不足し，3400 円ずつ集めると必要額を 1000 円以上超過する．顧問の先生から１万円の寄付がある場合には，１人あたり 2800 円ずつ集めると必要額を 300 円以上超過する．

Ｓ大学Ｙクラブの４年生は $\boxed{\text{ア}}$ 人おり，記念品を購入するのに必要な金額は $\boxed{\text{イ}}$ 万円である．

〔07 摂南大・法，外国語，経営情報〕

解答　人数を n 人，記念品の金額を p 円とすると，次のように表せる．

$$3000n = p - 6000 \qquad ①$$
$$3400n \geqq p + 1000 \qquad ②$$
$$2800n + 10000 \geqq p + 300 \qquad ③$$

これより，

$$p = 3000n + 6000 \qquad ①'$$
$$p \leqq 3400n - 1000 \qquad ②'$$
$$p \leqq 2800n + 9700 \qquad ③'$$

②′ と ①′ より，

$$3000n + 6000 \leqq 3400n - 1000$$
$$-400n \leqq -7000$$
$$n \geqq \frac{70}{4} = 17.5$$

③′ と ①′ より，

$$3000n + 6000 \leqq 2800n + 9700$$
$$200n \leqq 3700$$
$$n \leqq \frac{37}{2} = 18.5$$

n は正の整数だから，$n = 18$（人）．このとき，$p = 3000 \times 18 + 6000 = 60000$（円）．
したがって，$\boxed{\text{ア}}$ は **18**，$\boxed{\text{イ}}$ は **6**．

コメント　摂南大はこのところ，この種の問題をよく出題しています．文章を数式（等式と不等式）で表すことができれば，解法は容易でしょう．

解より，実際の超過額は，②は 1200 円，③は 400 円でした．

でも現実的には，①式の段階で顧問の先生から 6000 円の寄付をいただく（ように交渉する）のが簡単な解決では？　ま，これを言っては数学の問題になりませんか．

問 4　ある年のキャベツの販売量は，前年に比べて 20 %の増加であった．しかし，キャベツの価格が下落したために，売上高（価格×販売量）は結果として前年比 10 %の減少となってしまった．つまり，キャベツの価格は $\boxed{}$ %下落したことになる．

〔08 愛知大〕

解答　前年の売上高を S，価格を P，販売量を Q とする．

当年の販売量は $1.2Q$，翌年の売上高は $0.9S$ と表せる．

当年の価格の前年比を x とすると，当年の価格は xP となるから，売上高，販売量，価格の関係は，

前年： $S = P \times Q$
当年： $0.9S = xP \times 1.2Q$

と表せる．これより，$0.9 = 1.2x$.

これを解いて，$x = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0.75$.

すなわち，価格は 25 %の下落．

コメント　今年もまたありました．小学生でもできるような大学入試問題です．比・割合・百分率は小学校 5 年生の教材．

$\boxed{}$ に入る数値を直接求めることに固執すると，増加と減少では式が異なったり，%で表されているか，何割で表されているかによって式が異なったりすることになってしまいます．

上昇，下落に関係なく前年比を考えたほうが一般的であり，立式も楽です．すなわち，上の解答では次のように読み替えています．

販売量：	20 %の増加	→	前年比 1.2 倍
売上高：	10 %の減少	→	前年比 0.9 倍
価格：	？%の□□	←	前年比 x 倍

この問題の $\boxed{}$ に入るのは数値だけですが，%込みで比や割合と考えます．%，割，分などは cm や kg のような単位ではなく，「千」や「億」のように桁につけられた名前であると理解するとよいでしょう．次に示す割合は，表記法は異なっていても，同じ割合を表します．だから，見かけの上で違っていても等号で結んでよいのです．

$$0.2 = \frac{1}{5} = 2\,\text{割} = 20\% = 200\,‰ = 200000\text{ppm}$$

ですが，比だけの式で考えずに，計算の途中で消えてしまうけれど，売上高，価格，販売量という実体を考えておきましょう．関係概念である「比」よりも，実体概念である「量」のほうがイメージしやすいでしょう．

この問題だけが解ければいいのではなく，この種の問題を一般的に考えられることが大切です．

問 5　現在の貯水量が $a\,(\mathrm{m}^3)$ である貯水池に毎日一定量 $x\,(\mathrm{m}^3)$ の水が流入する一方で，毎日一定量 $y\,(\mathrm{m}^3)$ の水が流出しており，その結果，今から 60 日後にこの貯水池は空になるという．この仮定のもとで初めから 20 日後に別の水源から毎日一定量 $z\,(\mathrm{m}^3)$ の供給があれば，貯水池が空になる期限を 40 日だけ先にのばすことができるという．
このとき，貯水池の水量についてこれらの関係を式で表すと，

$$a + \boxed{\text{ア}}\,x = \boxed{\text{ア}}\,y$$
$$a + \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,z = \boxed{\text{エ}}\,y$$

となる．よって $z = \dfrac{a}{\boxed{\text{オ}}}$ である．
したがって，初めからこの供給があれば，この貯水池が空になる期限を $\boxed{\text{カ}}$ 日だけ先にのばすことができる．

〔03 立命館大・政策科学〕

解答　入ってくる水量と出ていく水量の関係を式で表すと，

$$a + 60x = 60y\,, \quad \cdots\cdots①$$
$$a + (60+40)x + (60-20+40)z = (60+40)y \quad \text{より}$$
$$a + 100x + 80z = 100y\,. \quad \cdots\cdots②$$

①より $y - x = \dfrac{a}{60}$. これと②より $z = \dfrac{a}{120}$.
$\boxed{\text{カ}}$ の日数を n とすると，

$$a + (60+n)x + (60+n)\frac{a}{120} = (60+n)y.$$

これより $n = 60$.
解をまとめると，次の通り．
$\boxed{\text{ア}} = 60$, $\boxed{\text{イ}} = 100$, $\boxed{\text{ウ}} = 80$, $\boxed{\text{エ}} = 100$, $\boxed{\text{オ}} = 120$, $\boxed{\text{カ}} = 60$.

コメント　日本語の読解力の問題になるのでしょうか？
式には単位を付けて，両辺の量の単位が同じになるように考えます．a は貯まっている水量なので単位は (m^3) ですが，x, y, z は 1 日あたりの水量なので単位は $(\mathrm{m}^3/\text{日})$ です．x, y, z は速度 (距離/時間) や密度 (重さ/体積) などと同じような「強さ」を表す**内包量**（ないほうりょう）で，a は長さ，面積，体積，時間のような「広がり」を表す**外延量**（がいえんりょう）です．足し算，引き算は同種の量の間で成り立つ演算ですから，このことを考えて式をたてます．式を立ててしまえば，あとは式変形ですむ．それが数式の威力です．

問 6　A 円をある年の初めに借り，その年の終わりから同額ずつ n 回で返済する．年利率を $r\ (>0)$ とし，1 年ごとの複利法とすると毎回の返済金額は $\boxed{}$ である．
預金など，1 年が経過するごとに利率 r で利息を元金に繰り入れることを複利法という．

〔06 芝浦工大・工〕

解答　毎回の返済額を x，第 k 回目に返済した後の残額を A_k 円とすると，

$$A_k = A_{k-1}(1+r) - x$$

が成り立つ．$A_0 = A$, $A_n = 0$ である．

$$\begin{aligned}
\text{これより，}\quad A_1 &= A(1+r) - x. \\
\text{次は，}\quad A_2 &= A_1(1+r) - x \\
&= \bigl(A(1+r) - x\bigr)(1+r) - x \\
&= A(1+r)^2 - x\,(1 + (1+r))\,. \\
\text{さらに，}\quad A_3 &= A_2(1+r) - x \\
&= \bigl(A(1+r)^2 - x\,(1 + (1+r))\,\bigr)(1+r) - x \\
&= A(1+r)^3 - x\,\bigl(1 + (1+r) + (1+r)^2\bigr)\,. \\
\text{したがって，}\quad A_n &= A(1+r)^n - x\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^k\right). \qquad \cdots\cdots \text{①}
\end{aligned}$$

(①の数学的帰納法による証明は略)

ここで，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^k$ は初項 1，公比 $(1+r)$，項数 n の等比数列の和だから，

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^k = \frac{1\,(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} = \frac{1-(1+r)^n}{-r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

①に代入すると，　$A_n = A(1+r)^n - x\left(\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right).$

$A_n = 0$ であるから，　$0 = A(1+r)^n - x\left(\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right).$

これより，　$x\left(\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right) = A(1+r)^n.$

よって，　$x = A(1+r)^n\left(\dfrac{r}{(1+r)^n - 1}\right) = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$

コメント　ローンの返済などで行われている「元利均等返済」の問題です．

「お金を借りて，何年も返さないでいると返済額はどうなるか」という問題もありますが，実際には分割して返していくわけです．ですから，

$$n \text{ 年後の元利合計は } A(1+r)^n \text{ 円になるから，1 年では } \frac{A(1+r)^n}{n} \text{円}$$

では間違い．これでは途中で返しているお金の利息も払っていることになります．

いや「間違い」と書いたのは間違いかな．この方法で利息を表示してある場合もあるのです.「アドオン（add-on）方式」といいます．この方式では，表示された利率よりも実際には高い利率で利息を払うことになります．貸す側から言えば，利率の数値を低く見せられるわけです．

また，毎回一定の金額を返済するのではなく，毎回一定の元金を返済する方法もあります．こちらは「元金均等返済」といいます．支払い利息は最初大きく，だんだん減っていきます．

「元利均等返済」の計算は途中は複雑な部分もありましたが，最後は x についての 1 次方程式になりました．これも，実際には 1 円以下の端数をどうするかによって，均等返済ではなく，どこかの返済回を少し増減させて調整することもあります．

100000 円を利率 2%で借りて 5 回で返すとき,（問題は 1 年に 1 回の返済ですが，普通は 1 月に 1 回なので利率はこの程度で）元利均等返済，アドオン，元金均等返済のそれぞれの返済額を比べてみました．

利息計算方法の違い

利率：　2%
元金：　100000　円

返済回	元利均等返済	アドオン返済	元金均等返済
1	¥21,215	¥22,081	¥22,000
2	¥21,215	¥22,081	¥21,600
3	¥21,215	¥22,081	¥21,200
4	¥21,215	¥22,081	¥20,800
5	¥21,215	¥22,081	¥20,400
返済額合計	¥106,075	¥110,405	¥106,000

問 7　ある国にはA, B, C, D, Eの5つの政党がある．選挙に際して各政党は共闘を模索するが，その場合の数を考えてみよう．ただし，E党はA党ともB党とも共闘しない．また，共闘は次のように解釈する．X党はX党自身と共闘であり，X党がY党と共闘し，Y党がZ党と共闘すれば，X党はZ党とも共闘である．

このような状況でどれだけの共闘のパターンがあるか数え上げてみる．

E党が単独で選挙戦に臨んだとき，残りの4党の共闘パターンは $\boxed{\text{ア}}$ 通りである．E党がC党とだけ共闘した場合は $\boxed{\text{イ}}$ 通りであり，E党がD党とだけ共闘した場合は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである．またE党がC党とD党と共闘した場合は $\boxed{\text{エ}}$ 通りである．したがって選挙戦におけるすべての共闘パターンは $\boxed{\text{オ}}$ 通りである．

〔05 慶応大・総合政策〕

解答　I: $\boxed{\text{ア}}$ E党単独の場合

(i) 4党共闘　$\cdots$ 1通り
(ii) 3党共闘　$\cdots$ 4通り
(iii) 2党-2党共闘 $\cdots$ 3通り
(iv) 2党のみ共闘 $\cdots$ 6通り
(v) 4党単独　$\cdots$ 1通り
以上，計15通り．

II: $\boxed{\text{イ}}$ E-C共闘の場合

(i) 3党共闘　$\cdots$ 1通り
(ii) 2党共闘　$\cdots$ 3通り
(iii) 3党単独　$\cdots$ 1通り
以上，計5通り．

III: $\boxed{\text{ウ}}$ E-D共闘の場合

E-C共闘と同様で，計5通り．

IV: $\boxed{\text{エ}}$ E-C-D共闘の場合

(i) 2党共闘　$\cdots$ 1通り
(ii) 各党単独　$\cdots$ 1通り
以上，計2通り．

$\boxed{\text{オ}}$ よって，すべての共闘パターンは27通り．

コメント　問題文中で大きな場合分けがしてあるので，易しくなっています．
「ある国」が日本としてもおかしくない仮定ですね．つまり，

(A, B) = (自民党，公明党)，(C, D) = (民主党，社民党)，E＝共産党

と解釈可能．あ，その他の小さな政党を除いての話です．
次は，ある党の「分裂」のパターンを数えてみる？(現実のほうが動きが早いようです) [*1]

[*1] 前回の総選挙（2005年夏）ころに書いたコメントです．

問 8　長さ L のロープを用いて長方形の囲いを作りたい．短辺の長さを x として

(1) 囲いの内部の面積 S を求めよ．

(2) x と S との関係のグラフをかき，S が最大値 S_{max} をとる点をそのグラフ中にに示せ．

(3) 囲いの形状を円とした場合の内部の面積を A とする．面積比 $\dfrac{A}{S_{max}}$ を求めよ．

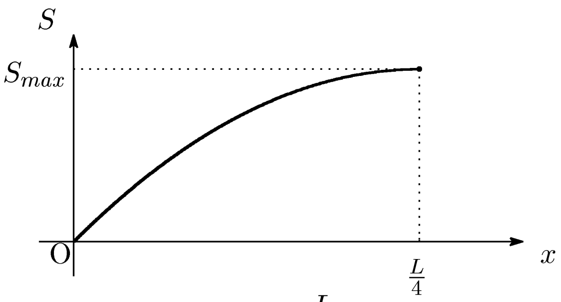
〔03 岐阜大・工（2 部）〕

解答 (1)　長辺の長さは $\dfrac{L}{2}-x$ となるので，

$$S = x\left(\frac{L}{2}-x\right) = -x^2+\frac{L}{2}x.\quad ただし, 0<x\leqq\frac{L}{4}.$$

(2)　$S = -x^2+\dfrac{L}{2}x = -\left(x-\dfrac{L}{4}\right)^2+\dfrac{L^2}{16}$

より，$x=\dfrac{L}{4}$ のとき，$S_{max}=\dfrac{L^2}{16}$ で，グラフは次のようになる．



(3)　円の半径を r とすると，$L=2\pi r$ より，$r=\dfrac{L}{2\pi}$.

円の面積は $A=\pi r^2=\pi\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^2=\dfrac{L^2}{4\pi}$．よって，

$$\frac{A}{S_{max}} = \frac{\left(\frac{L^2}{4\pi}\right)}{\left(\frac{L^2}{16}\right)} = \frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{16}{L^2} = \frac{4}{\pi}.$$

コメント　入試問題としては上のような解でいいのでしょうが，ちょっと不満があります．$\dfrac{4}{\pi}$ という解で，どのくらい大きいのか，という数量的な感覚が捉えられるでしょうか?

ここは $\dfrac{4}{3.14}\fallingdotseq 1.27$ と数値計算して，約 27 %，あるいは 3 割弱ほど大きくなる，と感じとってほしいものです．工学部ならこういう感覚がとても大事なはず．

問 9　近くの公園に円形のプールがある．ある日，このプールの広さを測定しようと考え，私と友人は巻尺とチョークを持って出かけた．プールの縁の 3 か所にチョークで印を付け，それぞれを A，B，C とした．AB，BC，CA の水平距離を測定すると，それぞれ $9\,\mathrm{m}, 6\,\mathrm{m}, 12\,\mathrm{m}$ であった．

(1) $\angle\mathrm{ABC}$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(3) このプールの面積を求めよ．

〔03 鳥取大・工（後期）〕

解答 (1)　cos（余弦）定理　および　$0 \leqq \sin\angle\mathrm{ABC} \leqq 1$　より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{BC})^2 - (\mathrm{CA})^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{9^2+6^2-12^2}{2\cdot 9\cdot 6} = \frac{-27}{108} = -\frac{1}{4},$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\tan\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\cos\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}.$$

(2)　面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{BC})\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{27\sqrt{15}}{4}\,(\mathrm{m}^2).$$

(3)　プール (円) の半径を R とすると，sin（正弦）定理から $\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = 2R$ だから，

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{8\sqrt{15}}{5}\,(\mathrm{m}).$$

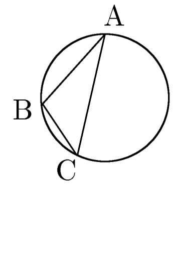
よって，プール (円) の面積を T とすると，

$$T = \pi R^2 = \pi\left(\frac{8\sqrt{15}}{5}\right)^2 = \frac{64\cdot 15}{25}\pi = \frac{192}{5}\pi\,(\mathrm{m}^2).$$

コメント　問題に示されているのは測定した数値であると書かれているので，結果もそれに応じた数値とするのが現実を扱う問題の解として適当でしょう．出題は工学部ですからね．それには電卓が必要でしょうか．でも，$\sqrt{15}$ は 4 より少し小さいということはわかりますし，$\sqrt{15} = \sqrt{3}\times\sqrt{5} = 1.73\times 2.23 \fallingdotseq 3.86$ くらいなら手計算でも可能．測定した長さの有効数字は多くて 2 桁なので，$\sqrt{15} \fallingdotseq 3.9$ で十分です．ということで，数値は次の通り．

$$S = \frac{27\sqrt{15}}{4} \fallingdotseq 26\,(\mathrm{m}^2),\quad R = \frac{8\sqrt{15}}{5} \fallingdotseq 6.2\,(\mathrm{m}),\quad T = \frac{192}{5}\pi \fallingdotseq 120\,(\mathrm{m}^2).$$

(1) の解から $\cos\angle\mathrm{ABC} < 0$ なので，$\angle\mathrm{ABC}$ は鈍角であることはわかります．半径 R の数値がわかると図がかきやすくなります．



問 10　銀行の暗証番号について，次の問いに答えよ．ただし，暗証番号は数字 0 〜 9 の任意の 4 桁の組み合わせで，数字は重複を許し，先頭の数字に 0 を使っても構わないものとする．

(1) 何の知識もない場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

(2) 4 桁のどこかに数字 9 が使われていることだけがわかっている場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

(3) 4 桁のどこかに数字 2 と 8 が使われていることだけがわかっている場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

(4) 4 桁のどこかに数字 7 が 2 個使われていることだけがわかっている場合，暗証番号を当てる確率を求めよ．

〔06 関東学院大・文，経〕

解答　どの番号を当てるのも等確率とする．

(1) 各桁それぞれ 10 通りだから，番号の総数は $10^4 = 10000$ 通り．

よって，確率は $\dfrac{1}{10000}$.

(2) どの桁も 9 でない番号は $9^4 = 6561$ 通りある．

番号の総数からこれを除くと，$10000 - 6591 = 3439$ 通り．よって，確率は $\dfrac{1}{3439}$.

【別解】

(i) すべての桁が 9 の番号（９ ９ ９ ９） $\cdots$ 1 通り．

(ii) 3 桁が 9 で残りは 9 以外の番号（９ ９ ９□） $\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_3 \times 9 = 36$ 通り．

(iii) 2 桁が 9 で残りは 9 以外の番号（９ ９□□） $\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_2 \times 9^2 = 486$ 通り．

(iv) 1 桁が 9 で残りは 9 以外の番号（９□□□） $\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_1 \times 9^3 = 2916$ 通り．

以上より，該当の番号は $1 + 36 + 486 + 2916 = 3439$ 通り．

(3) 2 も 8 も使われない番号は各桁 8 通りだから，$8^4 = 4096$ 通り．$\cdots$ ◆

2 はあるが，8 はない番号は $9^4 - 8^4 = 6561 - 4096 = 2465$ 通り．$\cdots$ ▲

8 はあるが，2 はない番号は，同様に 2465 通り．$\cdots$ △

したがって，2 と 8 が両方ある番号は，

$10000 - (4096 + 2465 + 2465) = 974$ 通り．$\cdots$ ◎

よって，確率は $\dfrac{1}{974}$.

	2 がある	2 がない	計
8 がある	◎	△	3439
8 がない	▲	◆　4096	6551
計	3439	6551	10000

【別解】

(i) 2 と 8 だけの番号

（２２２８）$\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 通り．

（２２８８）$\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り．

（２８８８）$\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ 通り．

以上 14 通り．

(ii) 2 がふたつ，8 がひとつで，残りは 2,8 以外の番号

（２２８□）$\cdots$ ${}_4\mathrm{C}_2 \times 2 \times 8 = 96$ 通り．

(iii) 2 がひとつ，8 がふたつで，残りは 2,8 以外の番号

（２８８□）$\cdots$ $4 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times 8 = 96$ 通り．

(iv) 2 がひとつ，8 がひとつで，残りは 2,8 以外の番号

（２８□□）$\cdots$ $4 \times 3 \times 8^2 = 768$ 通り．

以上より，該当の番号は $14 + 96 + 96 + 768 = 974$ 通り．

(4) 4 桁のどの 2 桁に 7 がくるかは，${}_4\mathrm{C}_2$ 通りで，残りの 2 桁は 7 以外だから，
7 が 2 個ある番号は ${}_4\mathrm{C}_2 \times 9^2 = 6 \times 81 = 486$ 通り．よって，確率は $\dfrac{1}{486}$.

コメント　**解**の先頭に書いた

どの番号を当てるのも等確率とする

（ふつうの教科書用語では「同様に確からしい」）

は，問題文中に書いてほしいものです．そうでないと計算できません．実際，銀行の暗証番号で同じ数字だけの番号を登録できなくしているのは，放っておくとそういう番号が多くなり，当てやすくなってしまうからでしょう．つまり，等確率であるとはいえなくなります．

(1) の「何の知識もない」は言葉が不適当.「何の情報もない」と言ったほうが適当でしょう．

それぞれの解は小数の概数で表すと値の比較がしやすくなります.「なぜ，そんなことを？」って，この問題はそもそもそれが目的なのですから．

(1) $\dfrac{1}{10000} = 0.0001$

(2) $\dfrac{1}{3439} \fallingdotseq 0.0003$

(3) $\dfrac{1}{974} \fallingdotseq 0.001$

(4) $\dfrac{1}{486} \fallingdotseq 0.002$

問 11　AとBの2つのチームが試合を行い，先に4勝したチームを優勝とする．AがBに勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．このとき，ちょうど6試合目でAが優勝する確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，優勝が決定するまでに行われる試合数の期待値は $\boxed{\text{イ}}$ 試合である．

〔06 福岡大・経，商〕

解答　ちょうど6試合目でAが優勝するのは，5試合目が終わった時点でAが3勝2敗になり，6試合目にAが勝つ場合だから，

$$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=10\times\frac{1}{2^6}=\frac{5}{32}. \qquad \cdots\ \boxed{\text{ア}} $$

同様に，試合数が4試合から7試合までの確率を求める．A が優勝する場合と B が優勝する場合の両方を考慮する．

(1) 4試合の場合：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}\times2=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}=\dfrac{2}{16}.$

(2) 5試合の場合：$\left({}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\dfrac{1}{2}\right)\times2=4\times\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{16}.$

(3) 6試合の場合：$\boxed{\text{ア}}$ の2倍だから，$\dfrac{5}{32}\times2=\dfrac{5}{16}.$

(4) 7試合の場合：$\left({}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}\right)\times2=20\times\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{5}{2^4}=\dfrac{5}{16}.$

よって，期待値は

$$ 4\times\frac{2}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=\frac{1}{16}(8+20+30+35)=\frac{93}{16}. \qquad \cdots\ \boxed{\text{イ}} $$

コメント　$\boxed{\text{イ}}$ の解は $\dfrac{93}{16}\fallingdotseq5.8\cdots$ として，5.8試合，あるいは6試合弱，と認識しておくのがよいでしょう．これが明示されてこそ，この問題の意義というものです．

ついでに，上記 (1) ～ (4) の解もそれぞれの値を比較するため，通分してあります．

この試合形式は一般に「七番勝負」と言われます．七番あるとは限らないのに．プロ野球の日本シリーズ，囲碁の本因坊戦，将棋の名人戦などで行われています．出題校は福岡ソフトバンクホークスの本拠地ですね．しかし，実際の勝負ではたまに引き分けがありますし，そもそも確率が $\dfrac{1}{2}$ かどうかも問題です．

「七番勝負」は，4戦目までは必ず行われますが，5戦目以降は試合があるかないかは確定しません．それは主催者にとっては大問題です．野球の場合にはホームチームに入場料収入や売店の売り上げなどが入りますし，囲碁，将棋は開催場所となる会場（ホテルなど）の収入に影響します．こういう意味で，経済学部，商学部には適した問題です．でも，やはり数学は選択科目なのでした．

実際の七番勝負ではどうなのでしょう．計算結果と比較してみましょう．

七番勝負決定までの試合数

プロ野球日本シリーズ・囲碁本因坊戦・将棋名人戦
（1986～2005年）

	ﾌﾟﾛ野球日本ｼﾘｰｽﾞ			囲碁本因坊戦			将棋名人戦		
年	勝	負	試合数	勝	負	試合数	勝	負	試合数
2005	4	0	4	4	1	5	4	3	7
2004	4	3	7	4	2	6	4	2	6
2003	4	3	7	4	2	6	4	0	4
2002	4	0	4	4	2	6	4	0	4
2001	4	1	5	4	3	7	4	3	7
2000	4	2	6	4	2	6	4	3	7
1999	4	1	5	4	2	6	4	3	7
1998	4	2	6	4	2	6	4	3	7
1997	4	1	5	4	0	4	4	2	6
1996	4	1	5	4	2	6	4	1	5
1995	4	1	5	4	1	5	4	1	5
1994	4	2	6	4	3	7	4	2	6
1993	4	3	7	4	1	5	4	0	4
1992	4	3	7	4	3	7	4	3	7
1991	4	3	7	4	2	6	4	1	5
1990	4	0	4	4	3	7	4	2	6
1989	4	3	7	4	0	4	4	0	4
1988	4	2	6	4	3	7	4	2	6
1987	4	2	6	4	0	4	4	2	6
1986	4	3	8	4	1	5	4	1	5

	野球			囲碁			将棋			理論値	
相対度数	4	試合	**0.15**	4	試合	**0.15**	4	試合	**0.2**	0.125	1/8
	5	試合	**0.25**	5	試合	**0.2**	5	試合	**0.2**	0.25	1/4
	6	試合	**0.25**	6	試合	**0.4**	6	試合	**0.3**	0.3125	5/16
	7	試合	**0.3**	7	試合	**0.25**	7	試合	**0.3**	0.3125	5/16
	平均試合数		**5.85**	平均試合数		**5.75**	平均試合数		**5.70**		
	標準偏差		**1.18**	標準偏差		**1.02**	標準偏差		**1.13**		

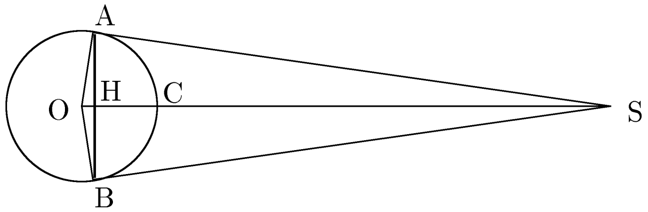
【注】1986年日本シリーズは引き分け1試合を含む

※データ
日本野球機構
http://www.npb.or.jp/nippons/
毎日新聞社（本因坊戦主催）
http://www.mainichi-msn.co.jp/entertainment/igo/honinbou/etc/rekishi.html
日本将棋連盟
http://www.shogi.or.jp/kisen/index.html

問 12　地上 $x$km の位置に静止している人工衛星から地球を見ると，地球は半径が $\boxed{}$ km の円板に見える．ただし，地球は半径が Rkm の球とする．

〔08 関西大・システム理工，環境都市工，化学生命工〕

解答　図のように人工衛星を S，地球の中心を O，人工衛星から見える地表の直径の両端を A，B，地表の中心を C，OS と AB の交点を H とする．



OA = OB = OC = R，CS = x，OA⊥SA，OB⊥SB，OS⊥AB であり，このときの AH が求める値である．

△OAS は ∠OAS が直角の直角三角形だから，

$$\mathrm{AS} = \sqrt{(\mathrm{OS})^2 - (\mathrm{OA})^2} = \sqrt{(R+x)^2 - R^2}.$$

ここで，△OAS の面積を 2 通りに表すと，

$$(1)\quad \triangle\mathrm{OAS} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AS} = \frac{1}{2}R\cdot\sqrt{(R+x)^2 - R^2}\ ,$$

$$(2)\quad \triangle\mathrm{OAS} = \frac{1}{2}\mathrm{OS}\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{2}(R+x)\cdot\mathrm{AH}\ .$$

これより，　$R\cdot\sqrt{(R+x)^2 - R^2} = (R+x)\cdot\mathrm{AH}\ .$

よって，　$\mathrm{AH} = \dfrac{R}{R+x}\sqrt{(R+x)^2 - R^2}\,.$

コメント　地球の半径は約 6300km，静止衛星は赤道上の高度約 36000km にあります．この位置以外にはありえません．[*2] 解答の図は，ほぼこの縮尺で描いてあります．

結果の式に $R = 6300$km, $x = 36000$km を代入して計算すると，AH ≒ 6230km となります．また，静止してはいないけれど，高度約 350km を飛ぶ国際宇宙ステーション（ISS ／ International Space Station）から地球を見た場合は AH ≒ 2000km です．つまり，狭い範囲しか見えないということです．

しかし，遠くのものは小さく，近くのものは大きく見えるわけですから，「半径が？km の円板に見える」のかという質問は表現として変です．遠くの静止衛星から見るより，

[*2] 静止衛星については高校の物理 II の教科書で扱っているものがありました．東京書籍，実教出版など．

近くのISSから見たほうが地球は大きく見える（空を占める量が多い）に決まっています．問われている数値ではそれを反映しません．「地球の半径？kmの円板を切り取った範囲が見える」とでもいえばよいのでしょうかね．

実際には，球体を離れたところから見た場合の見かけの大きさ「視直径」は角度で表します．図では $\angle\mathrm{ASB}$ です．そこで，$\theta = \frac{1}{2}\angle\mathrm{ASB} = \angle\mathrm{ASO}$ とすると，

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OS}} = \frac{R}{R+x}$$

です．だから，結果の式は何のことはない，$\mathrm{AH} = \mathrm{SA}\sin\theta$ を書き換えただけなのでした．

静止衛星（$x = 36000\mathrm{km}$）から地球を見た場合の[*3]視直径を計算すると，

$$\sin\theta = \frac{R}{R+x} = \frac{6300}{6300+36000} = \frac{6300}{42300} = 0.1489\cdots$$

より（関数電卓で）$\theta = 8.56\cdots°$，よって，視直径は約 $17°$ です．解の図を分度器で測ってみてください．視直径約 $17°$ はバスケットボールを手のひらに乗せて腕を伸ばして見たくらいの感じです．[*4]

ISS（$x = 350\mathrm{km}$）から見た地球の視直径は約 $142°$ です．視野いっぱいでしょうか．そんなに広範囲が見える窓はついてない？

ところで，最後の解を

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \frac{R}{R+x}\sqrt{(R+x)^2 - R^2} && \cdots ① \\ &= \frac{R}{R+x}\sqrt{2Rx + x^2} && \cdots ②\end{aligned}$$

とするのは得策ではありません．計算量が増えてしまいます．[*5]

①式は加減2回（$R+x$ は1回だけの計算でいい！），乗除4回に対して，②式は加減2回，乗除5回です．特に，複数の x に対して AH の値を計算しようとするときには，①式ではルートの中の R^2 の計算は1回だけで繰り返して使えますが，②式ではそれぞれについて $2Rx$ と x^2 を計算する必要があります．コンピュータで計算するにしても，こういうことが工学部ではとっても重要になります！

[*3] 静止衛星は無人ですが．

[*4] ボールの半径を 12cm，ボールの表面までの距離を 70cm とすると，だいたい同じ値になります．

[*5] ある出版社の問題集の解答では②だったので．

問 13　A, B, Cの 3 台の車が同一地点から同一方向に異なる時刻にスタートした．Aが出発して 90 分後にBが出発し，Bが出発して 90 分後にCが出発した．Cは出発して 3 時間後にAに追いつき，6 時間後にBに追いついた．3 台の車の速度がそれぞれ一定であったとすると，BがAに追いついたのは，Bが出発してから何時間後か．

〔06 専修大・ネットワーク情報〕

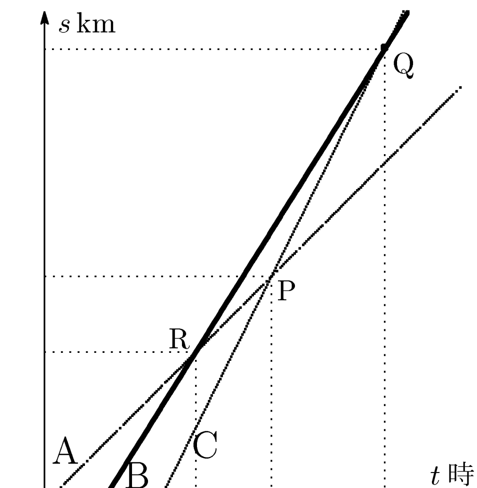
解答　A, B, Cの 3 台の車の速度をそれぞれ，$a\,\mathrm{km}/$時$, b\,\mathrm{km}/$時$, c\,\mathrm{km}/$時 とする．
また，A, B, Cの 3 台の車の走行時間をそれぞれ，t_a, t_b, t_c (時間) とすると
$t_a = t_b + 1.5$,　$t_b = t_c + 1.5$,　$t_a = t_c + 3$ である．

Cは出発して 3 時間後にAに追いついたのだから，
$c\,\mathrm{km}/$時$\times 3$ 時間 $= a\,\mathrm{km}/$時$\times 6$ 時間，すなわち, $3c = 6a$.　$\cdots$ ①
また，Cは出発して 6 時間後にBに追いついたのだから，
$c\,\mathrm{km}/$時$\times 6$ 時間 $= b\,\mathrm{km}/$時$\times 7.5$ 時間，すなわち, $6c = 7.5b$.　$\cdots$ ②
BがAに追いついたとき，Bの走行時間を t 時間とすると，
$b\,\mathrm{km}/$時$\times t$ 時間 $= a\,\mathrm{km}/$時$\times (t+1.5)$ 時間，すなわち, $bt = at + 1.5a$.　$\cdots$ ③
①②より，$b = \dfrac{8}{5}a$．③に代入して，$\dfrac{8}{5}at = at + \dfrac{3}{2}a$．$a \neq 0$ だから，これより $t = \dfrac{5}{2}$.
よって，Bが出発してから 2 時間 30 分後にAに追いついた．

コメント　中学入試問題でもおかしくない？　不等式ではなく方程式なので，むしろ易しいかもしれません．最近は大学卒の就職試験にもこのような問題が出題されています．

グラフを使った解法を示します．Aが出発した時刻を $t = 0$ とし，時刻 t におけるA, B, C それぞれの車の位置を $s\,\mathrm{km}$ で表します．それぞれの車の速度は一定なので，グラフは直線であり，グラフの傾きが速度を表します．(**解**とは t の意味が異なります)

(1) 車Aのグラフをかきます．
原点 O から適当な傾きで直線をひきます．「適当」ではかけない？　傾き 1 にしておきましょう．
(2) 車Cのグラフをかきます．
$(3, 0)$ から出発し，$t = 6$ で車Aのグラフと交わる直線をかきます．この交点 P がCがAに追いついた点であり，この直線の $t = 9$ の点 Q がCがBに追いついた点になります．
(3) 車Bのグラフをかきます．
Q と $(1.5, 0)$ を結ぶ直線をかきます．このグラフと車Aのグラフの交点 R がBがAに追いついた点です．



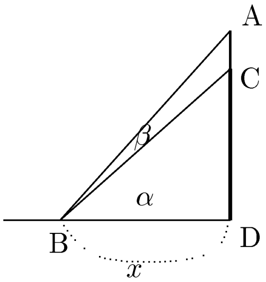
グラフをほぼ正確にかいてあれば R の t 座標 $t = 4$ が読み取れることでしょう．求める解はBの出発時との差 $4 - 1.5 = 2.5$ 時間後です．最初のAの傾きが適当でよいというのは，この問題ではそれぞれの速度は決まらず，でも，速度の比は決まるからです．

問 14　**解答略**（γ が β に追いつくのは，γ が P を通過した 30 秒後）

問 15　地上にいる人が，高さ 200m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50m の鉄塔を見る．鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，$\angle\mathrm{ABC}$ が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか．ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する．

〔08 千葉大・理（後期)〕

解答　ビルの下端を D，$\mathrm{BD} = x$，$\angle\mathrm{CBD} = \alpha$，$\angle\mathrm{ABC} = \beta$ とすると，



$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{CD}}{x} = \frac{200}{x},$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{AD}}{x} = \frac{250}{x}.$$

また，$\beta = (\alpha+\beta) - \alpha$ である．

タンジェントの加法定理により，

$$\tan\beta = \frac{\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha}{1 + \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha} = \frac{\frac{250}{x} - \frac{200}{x}}{1 + \frac{250}{x}\frac{200}{x}} = \frac{50}{x + \frac{50000}{x}}.$$

$x > 0$，$0^\circ < \beta < 90^\circ$ なので，

$$\beta\text{の最大値} \iff \tan\beta\text{の最大値} \iff x + \frac{50000}{x}\text{の最小値}$$

であるから，このときの x の値を求めればよい．
相加平均と相乗平均の関係から，

$$x + \frac{50000}{x} \geqq 2\sqrt{x\frac{50000}{x}} = 2\sqrt{50000}.$$

この不等式の等号が成り立つときが，$x + \dfrac{50000}{x}$ の最小値で，

このとき x の値は，$x = \dfrac{50000}{x}$ をみたす x となる．

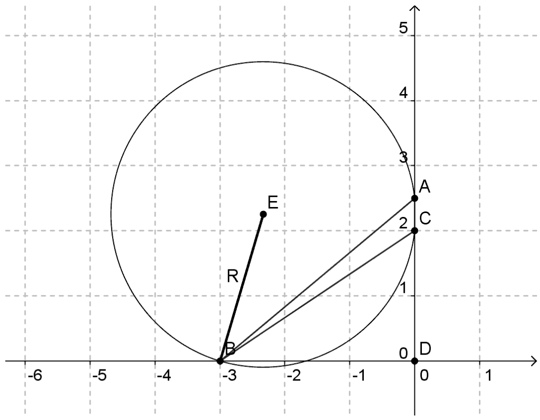
これを解いて，$x^2 = 50000$ より $x = \sqrt{50000} = 100\sqrt{5}$(m).

問題文で示された数値および無視する条件を考慮すると，解の有効数字は 1 桁か，多くとも 2 桁なので，解は $100\sqrt{5} = 100 \times 2.236\cdots \fallingdotseq 220$ より，約 220m.

コメント　ふつうの数学の問題の解答としては，最後の 2 行は書かないでしょう．(まさか「書いてはいけない」とは言わないですよね.）現実の問題を扱うときには，数学の問題として解くだけでは不十分で，求めた数学の解をもう一度現実に戻して解釈する必要があります．そのときに誤差や有効数字を考慮しなくてはならないのです．

とはいえ，今の受験生は「有効数字」を履修していません．改訂指導要領では,「有効数字」は中学 1 年の内容でようやく復活しました．だけど「有効数字何桁で求めよ」などと言われないと考えないのでは学習する意味がありません．それは出題する側，解説する数学教師側も同じです．

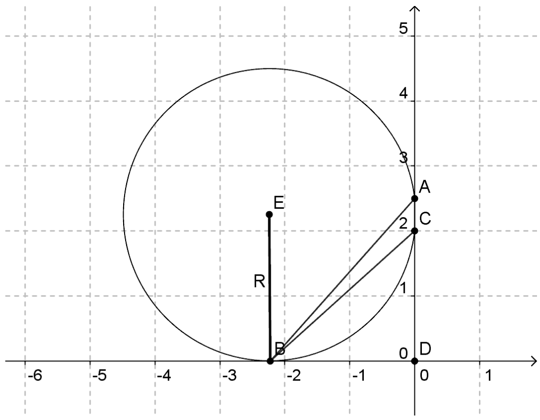
別解　ビルの下端をD，$\mathrm{BD} = x$, $\angle\mathrm{ABC} = \beta$ とする．
また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心をE，半径を R とする．



正弦定理により，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \dfrac{50}{\sin\beta} = 2R$ であるから，$\sin\beta = \dfrac{50}{2R}$.
$0^\circ < \beta < 90^\circ$ なので，

$$\beta\text{が最大} \iff \sin\beta\text{が最大} \iff R\text{ が最小} \iff \mathrm{EB}\perp\mathrm{DB}.$$

すなわち，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円が x 軸（直線DB）に接するときに β は最大となる．



このとき，方べきの定理により $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}$.
よって，$x^2 = 250\cdot 200 \quad (x > 0)$ より，$x = \sqrt{50000} = 100\sqrt{5}$ (m).
（数値解略）

コメント　別解は幾何による方法です．履修範囲が数学Ｉ・Ａまでても，この方法なら解けるでしょう．でも，気付かないとかえって難しいのかも？

図はフリーのダイナミック図形ソフト GeoGebra [*6]によるものです．点Bを掴んで，x 軸上を動かしてみることができます．

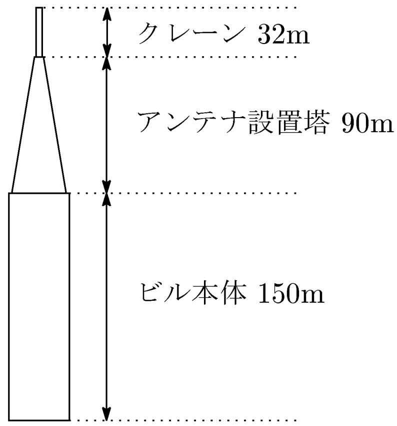
問 16　**解答略**（$x = \sqrt{a(a+b)}$）

[*6] `http://www.geogebra.org/` から．日本語版もあります．

実際のビルについて適用してみましょう．東京近辺の方にはおなじみのNTT ドコモ代々木ビルです．

このビルの外観は３つの部分に分けられます．ビルの高さは本体部とアンテナ設置塔部までの240m で，その上のクレーン部は含まないのだそうです．アンテナ部は上にいくほどすぼまっているので，この部分を見る対象にするのはうまくありません．240m のビル上にある32m のクレーンを見るとしましょう．つまり，問題は次の通り．

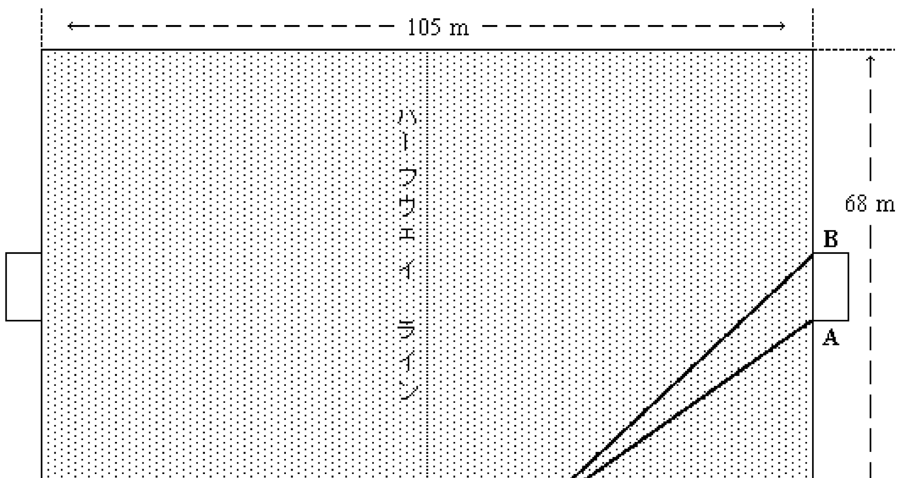
クレーン部を見たときの視角が最大となる地点はビルから何 m 離れたところか.



上の数値を適用すると，$\tan\alpha = \dfrac{240}{x}$,　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{272}{x}$. これより，約 260m です．

また，水平方向と考えると，サッカー競技場のゴールにも適用できます．

【問題】　サッカー競技場でタッチライン上から，ゴールの両端を見渡します．コーナーの位置 O から見ると，ゴールの両端は重なってしまい，視角は $0°$ です．ハーフウェイラインの方向に移動していくと，視角は大きくなっていきます．しかし，ゴールまでの距離が遠くなるので，ある位置を過ぎるとまた視角は小さくなっていきます．



では，**タッチライン上でゴールの両端を見渡す視角がもっとも大きくなる地点はどこでしょうか？**　図のように $\mathrm{OP} = x$ として，x の長さを求めてください．

フィールドは長方形です．長さは次の通りとします．

・コーナーから手前のゴールポスト (内側) まで：$\mathrm{OA} = a = 30.34$m

・ゴール (内側) の横幅：$\mathrm{AB} = b = 7.32$m

【解】33.8m.

問 17　円柱形の缶を金属板で作りたい（缶は両端とも金属板のフタで閉じている）．缶の容積を一定とした場合に，缶の製作に要する金属板を最小で済ませるには，底面の直径 d と高さ h との比をどのようにすればよいか．その比を求めよ．ただし，金属板の厚さは無視できるものとする．

〔03 信州大・繊維〕

解答 缶の容積を V, 表面積を S とすると，

$$V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4}d^2h \text{ より，} h = \frac{4V}{\pi d^2}.$$

一方,

$$S = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \pi dh = \frac{\pi}{2}d^2 + \pi dh = \frac{\pi}{2}d^2 + \pi d\frac{4V}{\pi d^2} = \frac{\pi}{2}d^2 + \frac{4V}{d}.$$

V は一定だから，S を d で微分すると，

$$S' = \pi d - \frac{4V}{d^2} = \frac{\pi d^3}{d^2} - \frac{4V}{d^2} = \frac{\pi}{d^2}\left(d^3 - \frac{4V}{\pi}\right).$$

d, h, V はすべて正なので，$S' = 0$ となるのは $d^3 = \dfrac{4V}{\pi}$ のときで，このとき S は最小となる．すなわち，

$$d^3 = \frac{4V}{\pi} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}d^2h\right) = d^2h$$

であるから，$d = h$ となり，したがって，　$d : h = 1 : 1$.

コメント 数学Ⅲの範囲の微分の内容です.

ほんとうにこれでいいのか，コンピュータで確認してみましょう.

d の値を変化させて，それぞれの S の値を求め，グラフをかいてみます．なんでもいいのですが，V の値を何か決めなくてはいけません．$1l(1000ml)$ にしておきます．表とグラフで見ると S が最小になるのは $d = h$ のあたりです．もう少し精度をあげて数値を求めると，$d = h \fallingdotseq 10.84$ となりました．この値は上の解で求めた結果に $V = 1000$ を代入した値

$$d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4000}{3.1415\cdots}} \fallingdotseq 1273.24^{\frac{1}{3}} \fallingdotseq 10.84$$

と一致します.

切り取ったあとの残りの金属板はどうするのでしょうか？　もとの金属板の形は関係ない？　切り残しの金属板は溶かして再利用するということにして，ここでは考慮しないことにしておきましょう.

実際にはこの解にかかわらず，飲料用の缶は手で握れる太さに作りますし，調理済みの食品用の缶はそのまま皿にあけずに食べることも考慮して平たくなっています．だからといって，こういう問題が無意味ということにはならないでしょう.

余談ですが，この問題で使っている変数は d なので S を d で微分した式は $\dfrac{dS}{dd}$ と書けます?!　$\cdots$ ん，何だこれは！

体積が一定の円柱の 直径,高さと表面積の関係

信州大03入試より

V=π (d/2)^2*h=一定= 1000

h=4V / (π d^2),

S=2π (d/2)^2+π dh,

S'=π d - (4V / d^2)

d	h	S	S'	d/h
1	1,273.24	4,001.57	-3,996.86	0.00
2	318.31	2,006.28	-993.72	0.01
3	141.47	1,347.47	-435.02	0.02
4	79.58	1,025.13	-237.43	0.05
5	50.93	839.27	-144.29	0.10
6	35.37	723.22	-92.26	0.17
7	25.98	648.40	-59.64	0.27
8	19.89	600.53	-37.37	0.40
9	15.72	571.68	-21.11	0.57
10	12.73	557.08	-8.58	0.79
11	10.52	553.70	1.50	1.05
12	8.84	559.53	9.92	1.36
13	7.53	573.16	17.17	1.73
14	6.50	593.59	23.57	2.16
15	5.66	620.10	29.35	2.65
16	4.97	652.12	34.64	3.22
17	4.41	689.25	39.57	3.86
18	3.93	731.16	44.20	4.58
19	3.53	777.58	48.61	5.39
20	3.18	828.32	52.83	6.28
21	2.89	883.20	56.90	7.27
22	2.63	942.08	60.85	8.36
23	2.41	1,004.86	64.70	9.56
24	2.21	1,071.45	68.45	10.86
25	2.04	1,141.75	72.14	12.27
26	1.88	1,215.70	75.76	13.80
27	1.75	1,293.26	79.34	15.46
28	1.62	1,374.36	82.86	17.24
29	1.51	1,458.97	86.35	19.16
30	1.41	1,547.05	89.80	21.21

10 ～11 を細分

d	h	S	S'	d/h
10	12.73	557.08	-8.58	0.79
10.1	12.48	556.28	-7.48	0.81
10.2	12.24	555.58	-6.40	0.83
10.3	12.00	555.00	-5.35	0.86
10.4	11.77	554.51	-4.31	0.88
10.5	11.55	554.13	-3.29	0.91
10.6	11.33	553.85	-2.30	0.94
10.7	11.12	553.67	-1.32	0.96
10.8	10.92	553.59	-0.36	0.99
10.9	10.72	553.60	0.58	1.02
11	10.52	553.70	1.50	1.05

↓

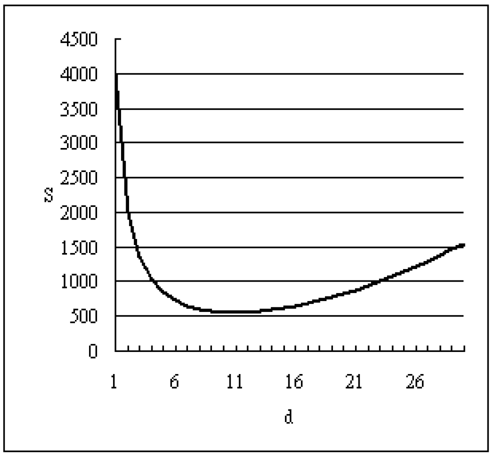
10.8 ～10.9 を細分

d	h	S	S'	d/h
10.8	10.92	553.59	-0.36	0.99
10.81	10.90	553.58	-0.27	0.99
10.82	10.88	553.58	-0.17	0.99
10.83	10.86	553.58	-0.08	1.00
10.84	10.84	553.58	0.01	1.00
10.85	10.82	553.58	0.11	1.00
10.86	10.80	553.58	0.20	1.01
10.87	10.78	553.59	0.30	1.01
10.88	10.76	553.59	0.39	1.01
10.89	10.74	553.59	0.48	1.01

【参考】SOLVER機能によって自動的に解を探す

d	h	S	S'	d/h
10.8385	10.8385	553.58	0.00	1.00

【注：ExcelのオプションでSOLVERツールが組み込まれている必要があります】



【確認】

4*V = 4000

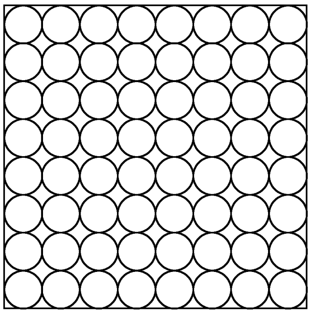
(4*V)/π = 1273.24

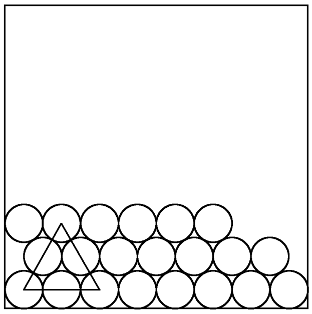
(4*V/π)^(1/3)= 10.83852

問 18　初めに下の左の図のように，1 辺 8 の正方形の箱の中に直径 1 のコインが 64 個入っている．次に右の図のように，この箱に同じ直径 1 のコインを下からなるべくたくさん詰め込んでいく．

(1) 右の図に示した，コインの中心を結んだ正三角形の高さは $\boxed{ア}$ である．

(2) この方法では，最大 $\boxed{イ}$ 段まで詰め込むことができ，その高さは $\boxed{ウ}$ である．このとき，箱の中にはコインが全部で $\boxed{エ}$ 個入っている．





〔06 東洋大・文系〕

解答　コインの直径は 1 なので，問題右図の正三角形の 1 辺の長さは 2.

よって，正三角形の高さは $2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.　$\cdots$ $\boxed{ア}$

したがって，3 段詰めたときの高さは $\sqrt{3}+1$ となる．

これより，n 段詰めたときの高さは　$(n-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$　$\cdots$ ①

とかける．つまり，$(n-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 \leqq 8$ となる最大の自然数 n を求めればよい．

これを解いて，$n \leqq \dfrac{14\sqrt{3}}{3}+1$.　$1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ だから，$n \leqq 9$.

よって，9 段詰めることができる．　$\cdots$ $\boxed{イ}$

このとき，高さは①より，$(9-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 = 4\sqrt{3}+1$.　$\cdots$ $\boxed{ウ}$

奇数番目の段は 8 個，偶数番目の段は 7 個あるので，9 段での総数は，

$8 \times 5 + 7 \times 4 = 68$ 個.　$\cdots$ $\boxed{エ}$

コメント　類題がパズルとしてよく出題されます．この問題では 4 個多く詰められます．

穴埋め式解答ですし，段数が少ないので，だいたいの図を描けば見当で求められます．つまり，n の候補は $8, 9$, せいぜい 10 までです．見当での解答を避ける問題にするには，数十段以上は必要でしょう．

一般式（①式）が求められたら，あとは電卓を使ってもよい問題でしょう．$\boxed{ウ}$ の解の値が $4\sqrt{3}+1 = 7.928\cdots < 8$ となることが電卓で確認できます．今の受験生でも $\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$ は覚えてる？　あるいは，$\dfrac{14}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{196}{3}} = \sqrt{65.\cdots}$ として，

$8 = \sqrt{64} < \dfrac{14}{\sqrt{3}} < \sqrt{81} = 9$ という手もあります．

実際に試してみたくなりますね．

問 19　ある子供が分数 $\dfrac{16}{64}$ を簡単にしようとして，分母と分子に同じ数 6 があるので，それを斜線で消し $\dfrac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\dfrac{1}{4}$ とした．結果だけをみれば正しいが，いつもこうはうまくいかない．a,b,c を 1 から 9 までの異なる整数として，$\dfrac{10a+b}{10b+c}$ を上のように処理した結果 $\dfrac{a}{c}$ がもとの分数と等しいとき，もとの分数を $\dfrac{16}{64}$ 以外すべて求めよ．

〔03 滋賀大・教育〕

解答　$\dfrac{10a+b}{10b+c}=\dfrac{a}{c}$ より，$(10a+b)c=(10b+c)a$. これを整理して，

$$10a(c-b)=(a-b)c.$$

これより，$(a-b)c$ は 10 の倍数．$1 \leqq a,b,c \leqq 9$ より，

(i) $c=5$ かつ $a-b$ が偶数
(ii) $a-b=5$ かつ c が偶数
(iii) $b-a=5$ かつ c が偶数

の 3 つの場合がある．

(i) $c=5$ の場合：　$10a(5-b)=(a-b)5$ より，

$$b=\frac{9a}{2a-1}.$$

$1 \leqq a \leqq 9$（ただし，$a \neq 5$）から上の条件に適する a,b を探すと，
$a=1,\ b=9$ および $a=2,\ b=6$.

(ii) $a-b=5$ の場合：　$10a(c-b)=5c,\ b=a-5$ より，

$$c=\frac{2a(a-5)}{2a-1}.$$

また，$6 \leqq a \leqq 9$ なので，この中から上の条件に適する a,b,c を探すと，
該当する数は存在しない．

(iii) $b-a=5$ の場合：　$10a(c-b)=-5c,\ b=a+5$ より，

$$c=\frac{2a(a+5)}{2a+1}.$$

また，$1 \leqq a \leqq 4$ なので，この中から上の条件に適する a,b,c を探すと，
$a=1,\ c=4,\ b=6$（ただし，これは問題の例なので除く）
および $a=4,\ c=8,\ b=9$.

以上より，$\dfrac{16}{64}$ 以外に該当する分数は $\dfrac{19}{95},\ \dfrac{26}{65},\ \dfrac{49}{98}$.

コメント　生徒は概して，このような一発で答えのでない問題はキライです．そのうえ，答案にはどこまでの計算を書けばいいのかも迷いそうです.（上の解はちょっと省略し過ぎかも？）

解の候補を絞っていき，最後はひとつずつ妥当性をチェックするという解法は，現実の問題解決ではよくあることです．ちなみに，すべてをチェックすると $9 \times 8 \times 7 = 504$ 通りですが，これが

(i) : $a = 1 \sim 4, 6 \sim 9$ の 8 通り，(ii) : $a = 6 \sim 9$ の 4 通り，(iii) : $a = 1 \sim 4$ の 4 通りの計 16 通りのチェックで済むことになりました.

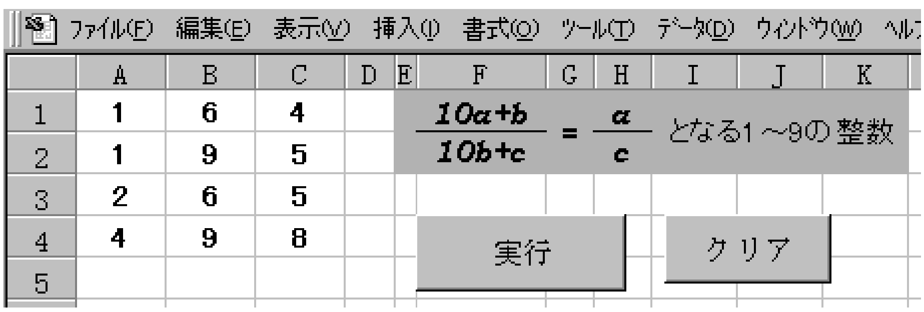
また，初歩的なプログラムの作成課題としても適当な問題だと思います．この場合にはすべての数についてチェックしてもよいでしょう.

ということで，Excel VBA で動くプログラムを作ってみました．シートの A 列，B 列，C 列にそれぞれ a, b, c の値が表示されます.

プログラム

```
Private Sub CommandButton1_Click()
i = 0
For a = 1 To 9
  For b = 1 To 9
    If a <> b Then
    For c = 1 To 9
      If (b <> c And a <> c) Then
        If (10 * a + b) * c = (10 * b + c) * a Then
            i = i + 1
            Sheet1.Cells(i, 1).Value = a
            Sheet1.Cells(i, 2).Value = b
            Sheet1.Cells(i, 3).Value = c
        End If
      End If
    Next c
    End If
  Next b
Next a
End Sub
```

実行結果



例示されたものも含めて，解の通りの 4 組あることが確認できました.

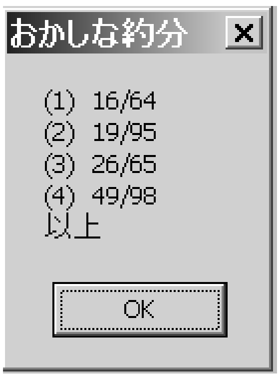
最近の Windows パソコンでは VB Script（Visual Basic Script）というプログラム言語が標準で備わっています．

「メモ帳」などのエディタでプログラムを書き，ファイル名を拡張子 vbs として保存します（例： testprogram.vbs）．そのファイルをクリックするだけで，プログラムが実行されます．

```
’おかしな約分 VBScript プログラム

i = 0   ’カウンタ
s = ""  ’メッセージ出力用
For a = 1 To 9
  For b = 1 To 9
    If a <> b Then
    For c = 1 To 9
      If (b <> c And a <> c) Then
        If (10 * a + b) * c = (10 * b + c) * a Then
            i = i + 1
            s = s& "("&i&")  "& a&b& "/"& b&c &vbCrLf
        End If
      End If
    Next
    End If
  Next
Next
s = s& "以上"
MsgBox s,,"おかしな約分"
```

実行結果

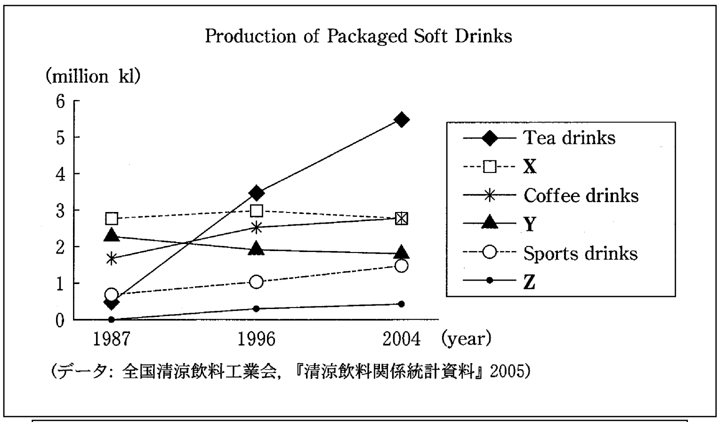


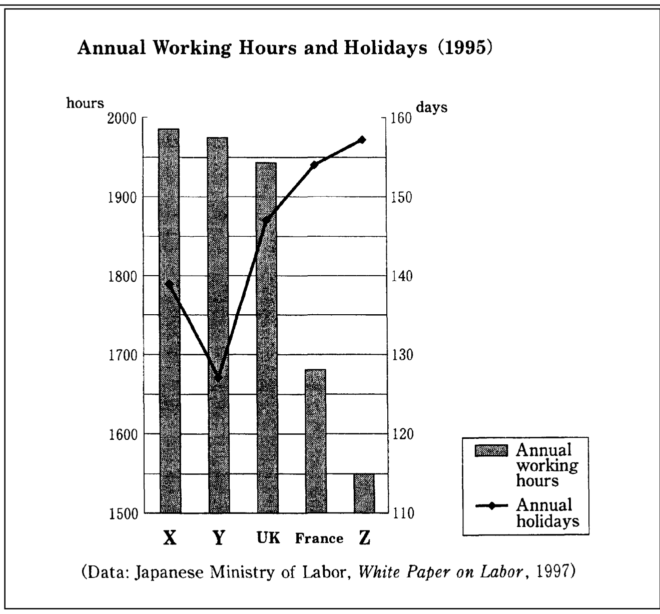
4　他教科でも

他教科の入試問題にも，数学教師としてコメントできる，また，すべきことがあります.

4.1　英語

次は英語のセンター試験の問題中に示されたグラフで，上は2007年度，下は2004年度のものです.





数学教師としては，このようなグラフは許せない！(ですよね)　調べてみたら，おかしなグラフはこれだけではありませんでした.
そこで，センター英語の問題を題材にグラフに関する（臨時の）授業をしてみました．特に社会科学系の進学希望者に好評でした.

なお，センター試験のグラフ批評の詳細は下記の拙稿を.
・「英語のセンター試験の統計グラフ問題を論評する」『数学セミナー』2007年12月号
・「2008年度センター試験の理科のグラフ問題に疑問」『数学セミナー』2008年5月号
また，ホームページにも統計グラフに関する資料をたくさん置いてあります.

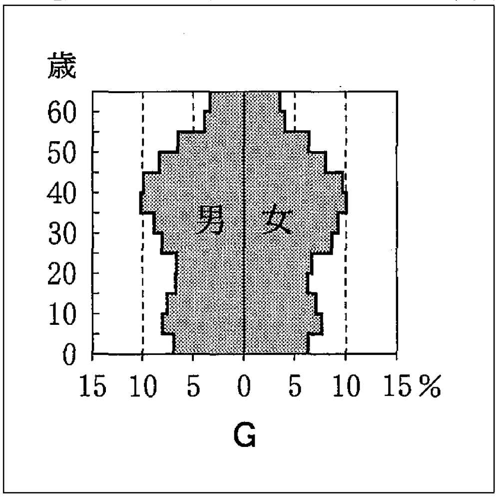
4.2　社会科系（地歴・公民），小論文など

地理のセンター試験は問題配点の約３割が統計グラフに関わる問題です．他に，政治経済，現代社会などでも統計グラフは頻出です．また，小論文試験や学習能力試験（などの類似の名前）で教科をまたがった内容の入学試験を行っている大学も増えてきました．そこで目立つのは統計的な処理や判断など，新課程を先取りした内容です．

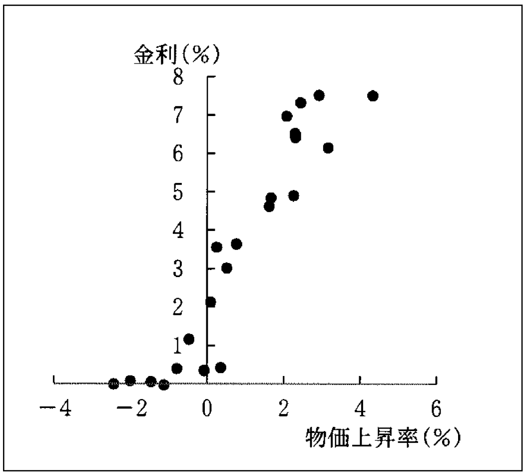
ご承知のように，この10年間，中学・高校の数学で統計はほとんど教えられていませんでした．ヒストグラムが数学の必修内容ではない（現行課程では）のに，社会科では人口ピラミッドが使われています．数学で相関を学んでいなくても，政治経済や現代社会の入試問題には散布図が出ています．教科書に載ってはいても，グラフの原理的な説明は書かれていません．

改訂指導要領でやっと統計が必修化されました．中学で移行措置は始まりましたが，高校生は完全移行になるまで放っておかれそうです．現行課程でもグラフを扱える個所はあります．三角グラフの原理は「正三角形の内部の点から各辺に下した垂線の長さの和は一定である」という定理から説明できます．これは．現行数学Ａの図形で扱える内容です．累積グラフは数列とその和に関連して扱うこともできます．その他,「総合の時間」のプレゼンテーションなどと関係して統計グラフを取り上げることも可能かと思います．

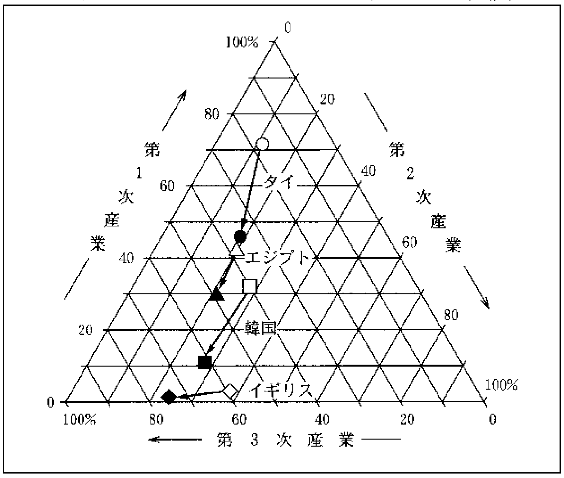
［人口ピラミッド　地理Ｂ 2008 年度］



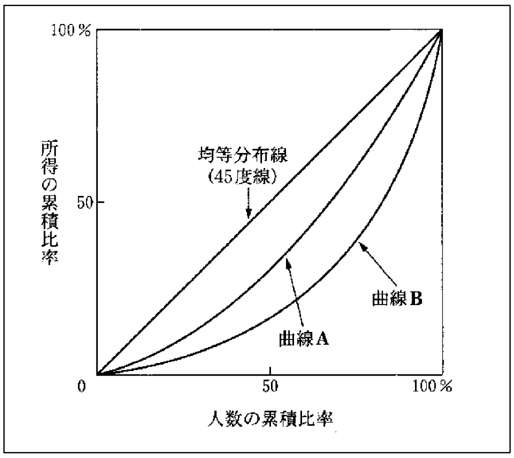
［散布図　政治経済 2007 年度］



［三角グラフ　地理Ｂ 2006 年度］



［累積グラフ（ローレンツ曲線）政治経済 2006 年度］



NTTドコモ代々木ビル

①北　約440m付近

②北北東　約360m付近

③東北東　約260m付近

④北東　約150m付近

⑤東　約100m付近

⑥南南西　約70m付近

⑦北西　約50m以内

⑧北北西　約180m付近

⑨北北西　約250m付近

距離は地図上でビル中心部(推定)からの距離.　撮影: よしだはじめ, Sep.23, 2009


新宿SKYビル
ビジネスホテルイマネ
新宿四丁目南
①
千駄ヶ谷6
千駄ヶ谷5
タカシマヤ
山手線
小田急小田原線
東急ハンズ
新宿吉田ビル
②
シャトレー新宿御苑2
やまとビル
南新宿SKビル
Francfranc
テルセンチュリーサザンタワー
③
日本ブランズウィックビル
⑨
紀伊國屋書店
新宿パークホテル
中央本線
東京工学院日本語学校
南新ビル
東京興産本社ビル
⑧
④
ナカニシビル
明治通り
JA全農新宿ビル
コモドNJビル
ドルミ御苑保谷ビル
オークンビル新館
千駄ヶ谷5
NTTドコモアネックス1
第一西脇ビル
御苑パビリオン
西脇スタディランドビル
東福商事ビル
千駄ヶ谷
⑤
テルウェル代々木ビル
⑦
NTTドコモ代々木ビル
新和マンション
学園ビル
山野美容専門学校
代々木
グランドパーク代々木
木1
東京勤労者医療会
代々木歯科
⑥
代々木クリスタルビル
グランスイート代々木
マイキャッスル代々木
YMS
代々木会館
黒田屋
ミヤタビル
アスクプランニングセンター
千駄ヶ谷5
(C)Mapion 地図データ(C)ZENRIN
100m