地球上の２点間の最短距離

—大学入試の文章題から考える数学—

（京都大 08 年度入試問題より）

よしだ はじめ

2012 年 2 月 3 日 公開版

問　地球上の北緯 60°，東経 135° の地点を A，北緯 60°，東経 75° の地点を B とする．A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1，R_2 を考える．R_1 は西に向かって同一緯度を飛ぶ経路とする．R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする．

R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3%以上短くなることを示せ．

ただし，地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする．また必要があれば［○～○ページの］三角関数表を用いよ．[*1]

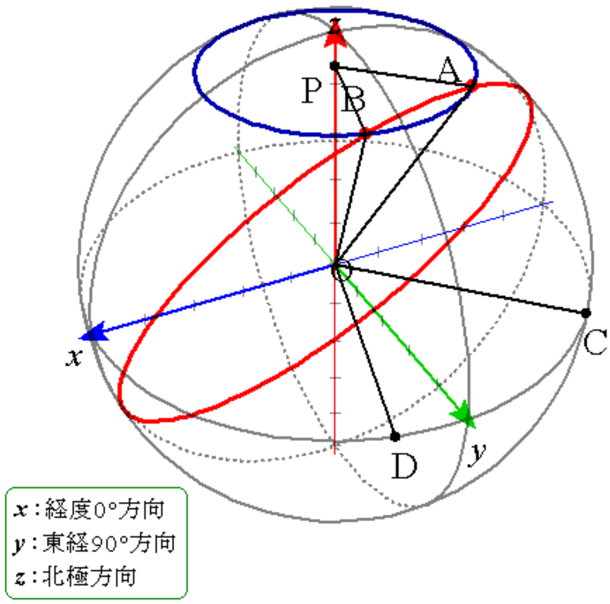
注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである．

〔08 京都大・理系〕

[*1] ここでは関数電卓や表計算ソフトなどを利用してください．

解答　与えられた 2 地点 A，B を含め，次のように点と長さを定める．

A：北緯 60°，東経 135° の地点．
B：北緯 60°，東経 75° の地点．
C：北緯 0°(赤道上)，東経 135° の地点．
D：北緯 0°(赤道上)，東経 75° の地点．
O：地球の中心．
P：北緯 60° で地軸（北極と南極を結ぶ直線）に垂直に切ったときにできる円の中心．
r：地球の半径．

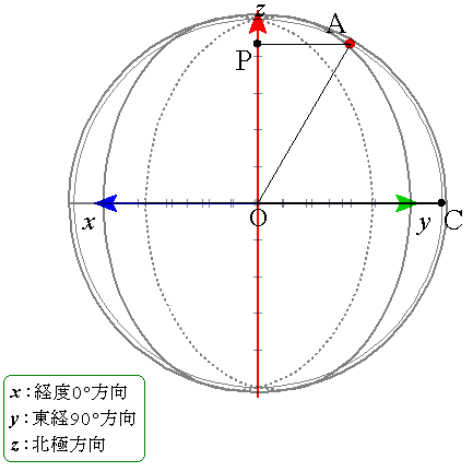


［図 1］

R_1 は P を中心とし，A，B を通る円の弧 AB の短いほうの長さであり．R_2 は O を中心とし，A，B を通る円の弧 AB の短いほうの長さである．$\dfrac{R_2}{R_1} \leqq 0.97$ を示せばよい．

まず，R_1 を求めるために．扇形 PAB に注目する．

O，P，A，C を含む平面で切って，それを垂直方向（赤道）から見ると（図 2），A の緯度から $\angle\mathrm{COA} = 60^\circ$，また，$\angle\mathrm{OPA} = 90^\circ$ であるから，$\mathrm{PA} = \mathrm{OA}\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}r$.（PB も同じ）

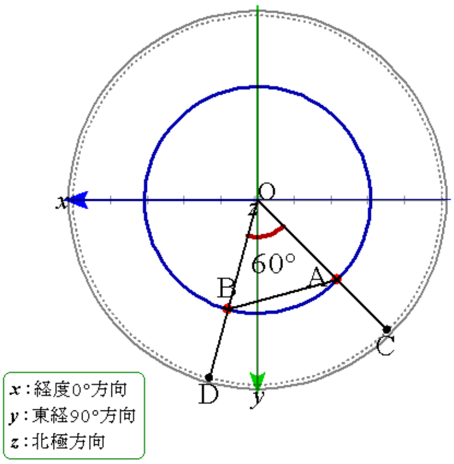


[図 2]

北極方向からみると（図 3），経度の差から
$\angle\mathrm{COD} = \angle\mathrm{APB} = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ$
である．よって，

$$R_1 = 2\pi \times \frac{1}{2}r \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{60}{360}\pi r.$$

また，$\triangle\mathrm{PAB}$ は正三角形だから，AB 間の距離は $\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}r$.



[図 3]

次に，R_2 を求めるために．扇形 OAB に注目する．

O，A，B を含む平面で切って，その平面の垂直方向から見る（図 4）．$\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = r$，$\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}r$ だから，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，余弦定理により，

$$\cos\theta = \frac{r^2 + r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2}{2\cdot r\cdot r} = \frac{2r^2 - \frac{1}{4}r^2}{2r^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{4}\right)}{2} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

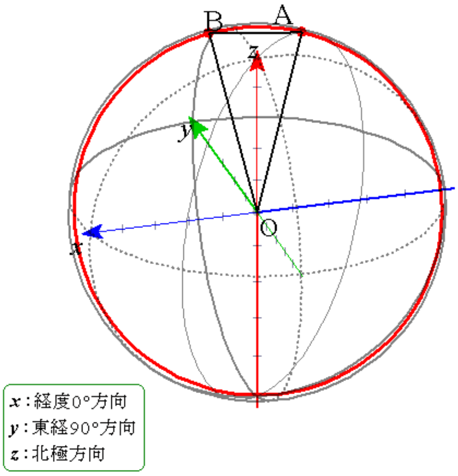
$\cos\theta = 0.875$ となる θ は関数電卓等により，$\theta = 28.955\cdots^\circ$. [*2]　よって，

$$R_2 = 2\pi r \times \frac{\theta}{360} < 2\pi r \times \frac{29}{360} = \frac{58}{360}\pi r.$$

以上より，

$$\frac{R_2}{R_1} < \frac{\left(\frac{58}{360}\pi r\right)}{\left(\frac{60}{360}\pi r\right)} = \frac{58}{60} = 0.966\cdots < 0.97$$

となるので，3%以上短いことが示された．



[図 4]

[*2] 試験問題で与えられていた三角関数表は 0.5° きざみのもので，これを使った場合は，$\cos 28.5^\circ = 0.8788$，$\cos 29.0^\circ = 0.8746$ より，$28.5^\circ < \theta < 29^\circ$ がわかります．

解説　この問題を考えるには，球面のイメージがきちんとできることが必要です．ここでは **3D-Grapes**[*3]というソフトを使って球面を描き，視点を動かしながら考えました．試験の答案では図を手描きする必要がありますが，図 2 〜 4 は切り口の平面図を描けばよいのです．

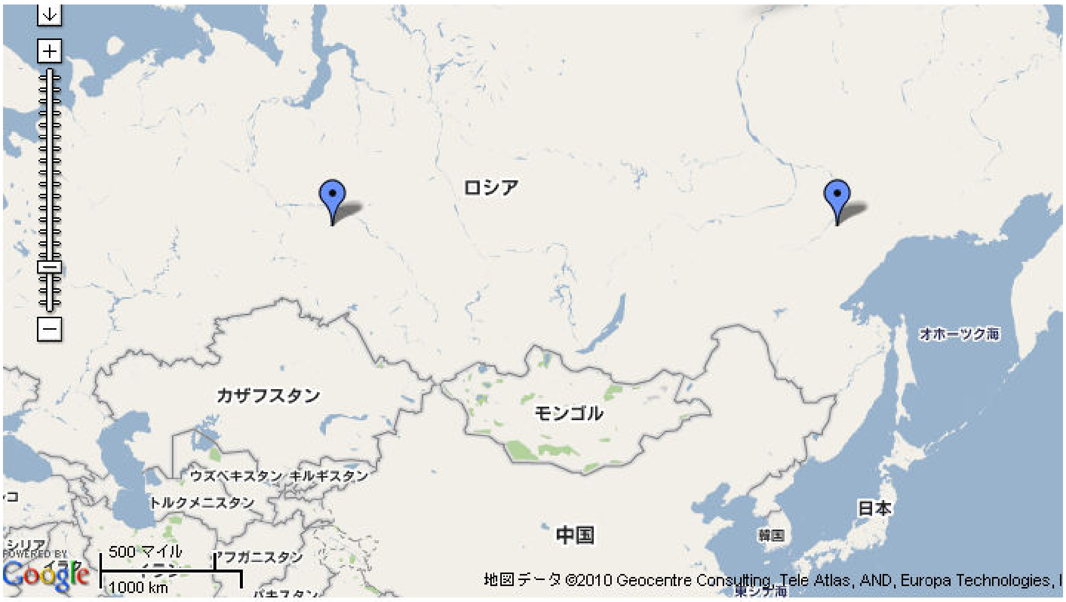
この問題では距離の割合を求めればよいので，地球の半径の値は必要ありませんでした．実際に地球の半径 $r \fallingdotseq 6380$km を代入して距離を求めてみます．(有効数字 3 桁)

$$R_1 = \frac{1}{6}\pi r = 0.167 \times 3.14 \times 6380 \fallingdotseq 3340(\mathrm{km}).$$

$$R_2 = \frac{58}{360}\pi r = 0.161 \times 3.14 \times 6380 \fallingdotseq 3230(\mathrm{km}).$$

よって，差では $3340 - 3230 =$ 約 110(km) 短くなります．

インターネットを検索すると緯度経度を指定して地図上の位置を示す，また逆に，地図上の位置を指定して緯度経度を示す機能のサイトが見つかります．試してみましょう．北緯 60°，東経 135° の A 地点，北緯 60°，東経 75° の B 地点は地図上では下の場所です．どちらもロシア内です．



［図 5］

地図右下の日本列島の北海道から九州までの距離は約 2000km です．上で求めた A，B 間の距離は約 3200 〜 3300km でした．おや，この地図での 2 点間の距離は日本列島の長さの 2 倍以上はありそうです．そう，メルカトル図法の地図は緯度が高くなるほど地図上の距離は実際の距離より長くなるのでしたね．

また，2 地点の経度・緯度を入力すると，その距離を求めてくれるというサイトもあります．たとえば，アメリカ National Hurricane Center のホームページにある
"Lat/Lon Distance Calculator – Find distance between latitude/longitude points"
などです．[*4]ハリケーンの位置と速度から到達時間を予想するために，距離を求める必要があるのでしょうか．

[*3] 友田勝久氏作のフリーソフト．Grapes の 3D 版．
[*4] 英語では，緯度は latitude，経度は longitude といいます．それで Lat/Lon です．

発展　先ほどの**解答**を少し発展させると，このようなプログラムを表計算ソフトなどで作ることができます．方針は次の通りです．

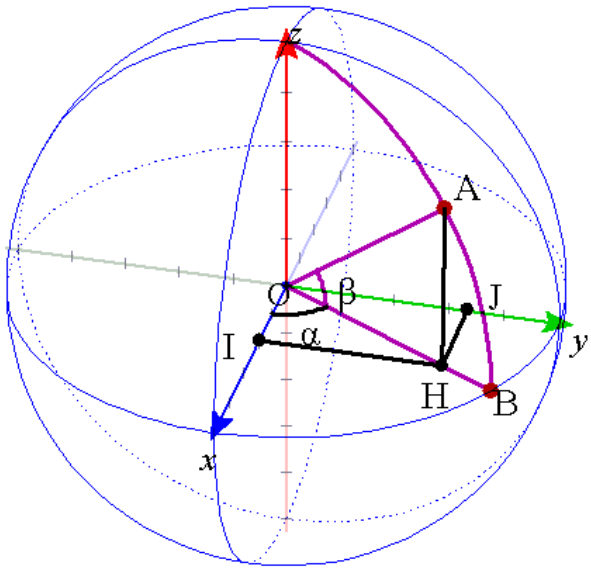
解答にあったように，与えられた２点間の地球内部を貫いた直線距離がわかれば，余弦定理によって２点に対する中心角がわかり，１周 $360°$ に対する割合から，表面上の距離が求められます．さかのぼって，２点間の地球内部を貫いた直線距離は２点の３次元座標がわかれば，空間における２点間の距離の公式で求められます．つまり，球面上の経度と緯度から球の中心を原点とする３次元座標を求めることができれば解決します．

経度・緯度 → ３次元座標 → 内部を貫いた距離 → 中心角 → 表面の距離

では，やってみましょう．

Step1：経度・緯度 → ３次元座標

原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を中心とする半径１の球で考えます．この球面上の点 A の経度を $\alpha°$，緯度を $\beta°$ とします．x 軸の正の方向が経度 $0°$，y 軸の正の方向が東経 $90°$ です．つまり，東経は $+$，西経は $-$，また，北緯は $+$，南緯は $-$ です．



A から x-y 平面（赤道で輪切りにした面）に垂線を下し，その足を H とします．A と H の x 座標，y 座標は同じです．H から x 軸，y 軸に下した垂線の足をそれぞれ I，J とします．

まず，$\mathrm{AH} = \sin\beta$ より，A の z 座標は $\sin\beta$ です．

また，$\mathrm{OH} = \cos\beta$，$\mathrm{OI} = \mathrm{OH}\cos\alpha$，$\mathrm{OJ} = \mathrm{OH}\sin\alpha$ より，H の x 座標は $\cos\alpha\cos\beta$，H の y 座標は $\sin\alpha\cos\beta$ です．

以上より，半径１の球面上の，経度 α，緯度 β の点 A の座標は次のようになります．

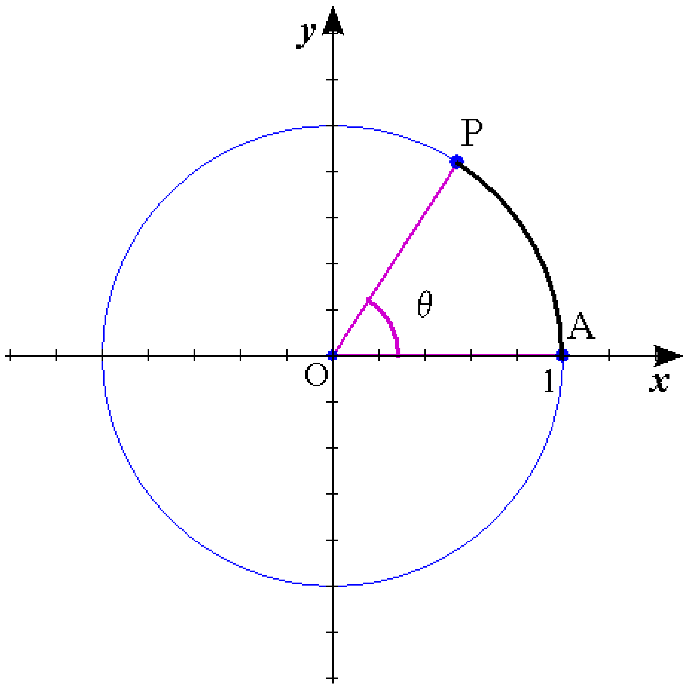
$$(\cos\alpha\cos\beta,\quad \sin\alpha\cos\beta,\quad \sin\beta)$$

なお，表計算ソフトでは角の単位がラジアンなので，α, β の値は角度からラジアンに変換します．

角をラジアンで表す — 弧度法

角の大きさを表す方法として，1 周を 360 等分した角の大きさを 1° とする度数法の他，弧の長さで中心角の大きさを定める弧度法があります．

弧度法では半径 1 の単位円で弧の長さが 1 となる中心角を 1 ラジアンと定めます．半径 r の円では弧の長さが r となる中心角が 1 ラジアンです．ラジアン（radian）は半径（radius）に由来する語です．なお，単位の語「ラジアン」は省略することもよくあります．



度数法と弧度法の相互変換

単位円の半円周について，その中心角は，度数法では 180° ですが，弧の長さは π なので，弧度法では π ラジアンと表せます．

したがって，ある角について，度数法で表した数値を a°，弧度法で表した数値を t ラジアンとするとき，a と t は次のような式で相互変換できます．

度数法→弧度法：$t = \dfrac{\pi}{180} \times a$ $\quad \left(1^\circ \text{あたり } \frac{\pi}{180} \text{ ラジアンで } a^\circ \text{ 分}\right)$

弧度法→度数法：$a = \dfrac{180}{\pi} \times t$ $\quad \left(1 \text{ ラジアンあたり } \frac{180}{\pi}^\circ \text{ で } t \text{ ラジアン分}\right)$

Step2：３次元座標 → 内部を貫いた距離

３次元座標における２点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の距離 d は

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

と表すことができます．ピタゴラスの定理（三平方の定理）を３次元に拡張した距離の公式です．

ここから先は，先ほどの問の解の考え方と同じです．

Step3：内部を貫いた距離 → 中心角

半径１の球面上の２点 A，B 間の球の内部を貫いた距離を d とすると，この２点に対する中心角 θ との関係は余弦定理によって次のようになります．

$$\cos\theta = \frac{1^2 + 1^2 - d^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - d^2}{2}$$

$\cos\theta$ から θ を求めるには逆三角関数 arccos，Excel では `ACOS( )` を使います．角の単位はラジアンです．

Step4：中心角 → 表面の距離

中心角 θ がラジアンで表されている場合には，θ はそのまま半径１の球面上での距離を表しています．したがって，地球の表面上での距離は θ ラジアンに地球の半径 r をかけた値で求められます．

以上をまとめると，２点の経度・緯度から距離を求める表計算シートができあがります．

下は Excel によるシートの例です．

	地球上の２地点の経度・緯度から表面に沿った最短距離を求める			
		地点1	地点2	
	経度（-180≦α≦180）	135	75	西経は-
	緯度（-90≦β≦90）	60	60	南緯は-
	地名（備考）			
	２地点間の距離	**3224.20**	km	
	経度（rad）	2.3562	1.3090	
	緯度（rad）	1.0472	1.0472	
	x 座標	-0.3536	0.1294	
	y 座標	0.3536	0.4830	
	z 座標	0.8660	0.8660	
	２点間の（内部）距離	0.5000		
	中心角θのcos	0.8750		
	中心角θ(rad)	0.5054		
	地球の半径（km）	6380		

次のような計算式を設定してあります.

	B	C	D
3		地点1	地点2
4	経度（-180≦α≦180）	135	75
5	緯度（-90≦β≦90）	60	60
6	地名（備考）		
7	2地点間の距離	=C16*C17	km
8			
9	経度（rad）	=C4*(PI()/180)	=D4*(PI()/180)
10	緯度（rad）	=C5*(PI()/180)	=D5*(PI()/180)
11	x 座標	=COS(C9)*COS(C10)	=COS(D9)*COS(D10)
12	y 座標	=SIN(C9)*COS(C10)	=SIN(D9)*COS(D10)
13	z 座標	=SIN(C10)	=SIN(D10)
14	2点間の（内部）距離	=SQRT((C11-D11)^2+(C12-D12)^2+(C13-D13)^2)	
15	中心角θのcos	=(2-C14^2)/2	
16	中心角θ(rad)	=ACOS(C15)	
17	地球の半径（km）	6380	

任意の2地点の経度・緯度を入力して，距離を求めてみましょう.

例　東京（成田空港）：　東経 140.39°　北緯 35.77°
　　ニューヨーク（JFK 空港）：　西経 73.78°　北緯 40.64°

（データは Google Geocoding より．数値は小数点以下2桁まで）

距離は ＿＿＿＿＿＿ km.

なお，実際に飛行機が飛ぶ場合には，風の影響や燃料消費量などを考慮するので，最短距離のルートを飛ぶとは限りません.

この入試問題をさらに発展させ，一般化すると**球面幾何学**という分野になります.

解説提示用ファイル

ファイル名	動作
kyumen_kyori.gp3	3D-GRAPES
kyumen_kyori.xls	Excel

- 上記の各データファイルの著作権は作者にありますが，商用の場合を除き，自由にご利用いただけます.
- 3D-GRAPES は友田勝久氏の開発によるフリーソフトです.
  http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/
  からダウンロードできます.
- Excel はマイクロソフト社の製品です.