問 28　半径 a cm の球 B を，球の中心を通る鉛直線に沿って毎秒 v cm の速さで下の方向に動かし，水で一杯に満たされた容器 Q に沈めていく．球 B を沈め始めてから t 秒後までにあふれ出る水の体積を V cm^3 とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a，v は正の定数で，容器 Q に球 B を完全に水没させることができるとする．

(1)　V を a，v，t の式で表せ．また，変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ が最大になるのは，沈め始めてから何秒後か．

(2)　容器 Q は 1 辺の長さが b cm の正四面体から 1 面を取り除いた形をしており，開口した面は水平に保たれている．球 B は完全に水面下に入った瞬間，水面と容器 Q の 3 つの面に接するという．b を a で表せ．

〔11 鳥取大・工，農〕

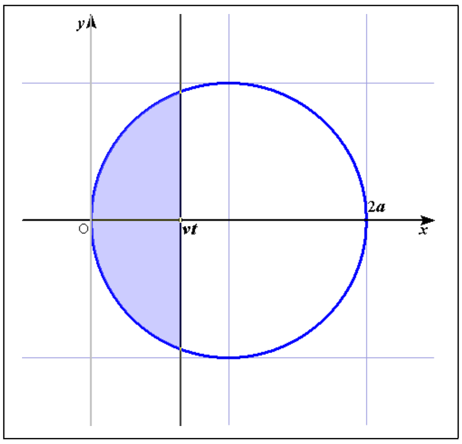
問 28　半径 a cm の球 B を，球の中心を通る鉛直線に沿って毎秒 v cm の速さで下の方向に動かし，水で一杯に満たされた容器 Q に沈めていく．球 B を沈め始めてから t 秒後までにあふれ出る水の体積を V cm^3 とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a，v は正の定数で，容器 Q に球 B を完全に水没させることができるとする．

(1)　V を a，v，t の式で表せ．また，変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ が最大になるのは，沈め始めてから何秒後か．

解　t 秒後までにあふれ出る水の体積 V は t 秒間に水没した球の体積に等しい．t 秒間に水没する長さ（深さ）は vt cm である．xy 座標で垂直方向を x 軸方向にとれば，球 B は中心 $(a,\,0)$，半径 a の半円 $y=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$ を x 軸の周りに回転させたもので，V はこれを $x=0$ から vt まで定積分した値となる．

すなわち，

$$V=\int_0^{vt}\pi y^2\,dx=\int_0^{vt}\pi\left(\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)^2 dx=\pi\int_0^{vt}\left(a^2-(x-a)^2\right)dx$$



である．よって，

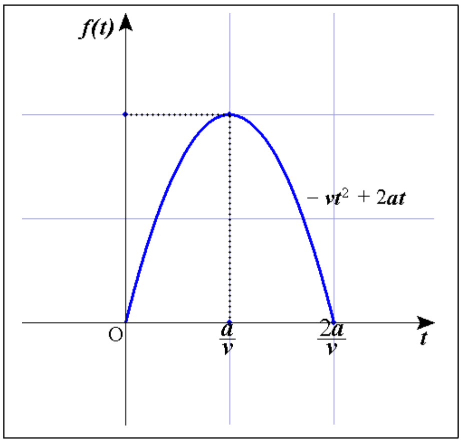
$$V=\pi\int_0^{vt}\left(a^2-(x^2-2ax+a^2)\right)dx=\pi\int_0^{vt}\left(-x^2+2ax\right)dx$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_0^{vt}=-\frac{1}{3}\pi v^3t^3+a\pi v^2t^2.$$

これより，

$$\frac{dV}{dt}=-\pi v^3t^2+2a\pi v^2t=\pi v^2(-vt^2+2at).$$

$\dfrac{dV}{dt}$ の最大値は，$-vt^2+2at$ が最大値となるときで，$v>0$，$a>0$，$t>0$ だから，$f(t)=-vt^2+2at$ とすると，グラフは右のようになる．

よって，$f'(t)=-2vt+2a=0$ ときが最大で，これより，$t=\dfrac{a}{v}$ 秒後．



(2) 容器 Q は 1 辺の長さが b cm の正四面体から 1 面を取り除いた形をしており，開口した面は水平に保たれている．球 B は完全に水面下に入った瞬間，水面と容器 Q の 3 つの面に接するという．b を a で表せ．

解 1 辺の長さが b cm の正四面体に内接する球が半径 a の球 B である．

まず，この正四面体のひとつの面の正三角形の中線（頂点から対辺の中点に下した垂線）の長さは，$b\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b$ である．

次に，正四面体の高さ h を求める．正四面体の 2 つの面のなす角は，面の正三角形の中線での切り口の角で，これを θ とすると，余弦定理から

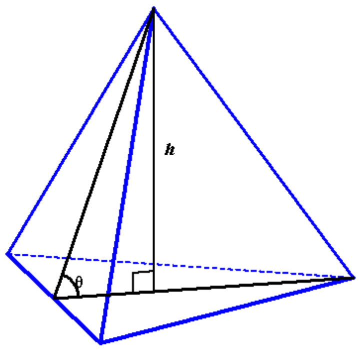
$$b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\cos\theta.$$

$\cos\theta > 0$, $\sin\theta > 0$ だから，$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$.

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

よって，

$h = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)\sin\theta = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}b.$

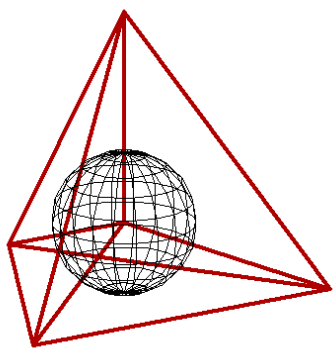


正四面体の体積を V_Q として，これを 2 通りに表す．正四面体のひとつの面の面積を S とすると，$S = \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}b = \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$ である．

(i) 正四面体の体積 $V_Q = \dfrac{1}{3}Sh$ より，

$$V_Q = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}b\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3.$$

(ii) 正四面体は，内接する球の中心と各頂点を結ぶ線分で，合同な 4 つの三角錐に分割できる．この三角錐の高さは球の半径 a に等しいから，



$$V_Q = 4\cdot\frac{1}{3}Sa = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\cdot a\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}ab^2.$$

(i)，(ii) より，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}b^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}ab^2$．これを整理して，$b = 2\sqrt{6}\,a$.

解説　(1) は座標の取り方によって，定積分を計算する式は多少異なります．計算しやすいように座標を取るようにしましょう．

体積の解

$$V = -\frac{1}{3}\pi v^3 t^3 + a\pi v^2 t^2$$

は，$vt = 2a$ のとき，つまり全部水没したとき，球の体積

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

となることは確認しましょう．

(2) の正四面体に関する問題は数学ＩＡの範囲．解答例では余弦定理によって 2 つの面のなす角のコサインを求め，これから高さ h を求めました．これは数学ＩＡの定番問題ですね．他に，正四面体の頂点から底面へ下した垂線の足が底面の正三角形の重心であることを利用する方法なども使えます．[6]

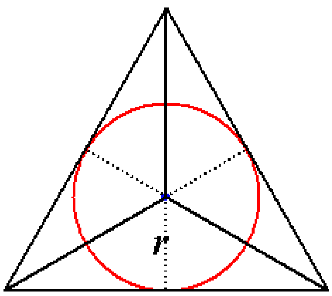
正四面体を中心で 4 分割して体積を表す方法は，三角形の面積を内心と頂点を結ぶ線分で 3 分割して，

$$S = \frac{1}{2} \times \text{(周囲の長さ)} \times \text{(内接円の半径)}$$

とした考えを立体（正四面体）へ拡張した結果，

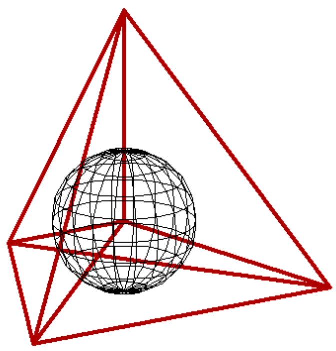
$$V = \frac{1}{3} \times \text{(表面積)} \times \text{(内接球の半径)}$$

となったものです．



正三角形と内接円

$$\frac{\text{(内接円の半径)}}{\text{(正三角形の 1 辺)}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0.288\cdots$$



正四面体と内接球

$$\frac{\text{(内接球の半径)}}{\text{(正四面体の 1 辺)}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = 0.204\cdots$$

[6]「1 辺 b の正四面体の体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{12}b^3$ は公式として暗記しろ」なんて書いてある参考書 (?) もあるようですが，たとえ暗記していたとしても，説明できることが必要です．