

実感できる順列・組合せ

—— 文字の順列・組合せをすべて書き出す ——

よしだ はじめ (河合塾 COSMO コース)

【概要】 順列・組合せの授業では、最初はすべてのパターンを書き出してみるが、その後は何通りかという数値を求めることに終始しがちになる。それでは求めた数値にリアリティを感じ難い。人手ではメンドウなことでも、コンピュータなら文句を言わずにやってくれる。**JK**は文字の順列・組合せをすべて表示させるプログラムである。

1. 順列・組合せの数値のリアリティ

順列・組合せの授業の最初には、すべてのパターンを書き上げてみることを行う。教師が書いてみせたり、生徒にもさせる。しかし、せいぜい $4! = 24$ 通りや、 ${}_6C_3 = 20$ 通りくらいまでだろう。 $5! = 120$ 通りや ${}_8C_4 = 70$ 通りなんて生徒に書かせたら、絶対に不満爆発。教師自身もやる気にはならない。やり方さえわかればいいことなので、そこまでやる必要もない。だから、このあとは、

異なる5文字を並べ換えると $5! = 120$ 通り、

異なる6文字を並べ換えると $6! = 720$ 通り、

異なる7文字を並べ換えると $7! = 5040$ 通り、

異なる8文字を並べ換えると $8! = 40320$ 通り、

などと、計算で数値を求めるだけである。でも、これで数の大きさを実感するだろうか？

小学校では、百万や1億を教えるときに、その大きさをタイルなどで作ってみる授業実践がある。非常に大きな数を「天文学的数」ということがある。最近ではもっと大きな数は「組合せ論的数」と呼ぶこともあるそうだ。

『壺の中』(安野雅一郎・著, 安野光雅・絵/童話屋, 1982年)は階乗の概念を学ぶことのできるすばらしい絵本である。その説明では $1! = 1$ 個から $8! = 40320$ 個までの点を描いてある。 $8!$ は2ページが点で埋まっている。でも、 $9! = 362880$ 個の点は18ページになるからといって省略してある。まあ、あたりまえか。

$6! = 720$ 通りだって、実際に全部並べてみるとかなりのものだ。私の名前はひらがなで「よしだはじめ」、すべて異なる6文字である。これを並べ換えると、ほうら、次のページのようにになる。ビックリ(!)したかしら？

これは、もちろん手で入力したわけではない。コンピュータにやらせたものである。コンピュータなら、メモリーなどの関係で無制限とは言えないが、数千、数万通りなんてラクラクやってくれる。プログラムさえあれば。

Mathematicaなどの数式処理ソフトにもこのような機能がある。しかし、残念ながら高価格のためか、高校の現場で、特に生徒に普及しているとは言い難い。パッケージソフトではアルゴリズムもわからない。

そこで、作成したのが文字の順列・組合せをすべて表示するプログラム **JK** である。JKは Junretsu (順列)・Kumiawase (組合せ)の頭文字を取ったものである。**JK**には現在、Windows版、Excel版、Excel英語版の3つがある。

1	よしだはじめ	61	よはじしだめ	121	しよだはじめ	181	しはじよだめ	241	だよしはじめ	301	だはじよしめ
2	よしだはめじ	62	よはじしめだ	122	しよだはめじ	182	しはじよめだ	242	だよしはめじ	302	だはじよめし
3	よしだじはめ	63	よはじだしめ	123	しよだじはめ	183	しはじだよめ	243	だよしじはめ	303	だはじしよめ
4	よしだじめは	64	よはじだめし	124	しよだじめは	184	しはじだめよ	244	だよしじめは	304	だはじしめよ
5	よしだめはじ	65	よはじめしだ	125	しよだめはじ	185	しはじめよだ	245	だよしめはじ	305	だはじめよし
6	よしだめじは	66	よはじめだし	126	しよだめじは	186	しはじめだよ	246	だよしめじは	306	だはじめしよ
7	よしはだじめ	67	よはめしだじ	127	しよはだじめ	187	しはめよだじ	247	だよはしじめ	307	だはめよしじ
8	よしはだめじ	68	よはめしじだ	128	しよはだめじ	188	しはめよじだ	248	だよはしめじ	308	だはめよじし
9	よしはじだめ	69	よはめだしじ	129	しよはじだめ	189	しはめだよじ	249	だよはじしめ	309	だはめしよじ
10	よしはじめだ	70	よはめだじし	130	しよはじめだ	190	しはめだじよ	250	だよはじめし	310	だはめしじよ
11	よしはめだじ	71	よはめじしだ	131	しよはめだじ	191	しはめじよだ	251	だよはめしじ	311	だはめじよし
12	よしはめじだ	72	よはめじだし	132	しよはめじだ	192	しはめじだよ	252	だよはめじし	312	だはめじしよ
13	よしじだはめ	73	よじしだはめ	133	しよじだはめ	193	しじよだはめ	253	だよじしはめ	313	だじよしはめ
14	よしじだめは	74	よじしだめは	134	しよじだめは	194	しじよだめは	254	だよじしめは	314	だじよしめは
15	よしじはだめ	75	よじしはだめ	135	しよじはだめ	195	しじよはだめ	255	だよじはしめ	315	だじよはしめ
16	よしじはめだ	76	よじしはめだ	136	しよじはめだ	196	しじよはめだ	256	だよじはめし	316	だじよはめし
17	よしじめだは	77	よじしめだは	137	しよじめだは	197	しじよめだは	257	だよじめしは	317	だじよめしは
18	よしじめはだ	78	よじしめはだ	138	しよじめはだ	198	しじよめはだ	258	だよじめはし	318	だじよめはし
19	よしめだはじ	79	よじだしはめ	139	しよめだはじ	199	しじだよはめ	259	だよめしはじ	319	だじしよはめ
20	よしめだじは	80	よじだしめは	140	しよめだじは	200	しじだよめは	260	だよめしじは	320	だじしよめは
21	よしめはだじ	81	よじだはしめ	141	しよめはだじ	201	しじだはよめ	261	だよめはしじ	321	だじしはよめ
22	よしめはじだ	82	よじだはめし	142	しよめはじだ	202	しじだはめよ	262	だよめはじし	322	だじしはめよ
23	よしめじだは	83	よじだめしは	143	しよめじだは	203	しじだめよは	263	だよめじしは	323	だじしめよは
24	よしめじはだ	84	よじだめはし	144	しよめじはだ	204	しじだめはよ	264	だよめじはし	324	だじしめはよ
25	よだしはじめ	85	よじはしだめ	145	しだよはじめ	205	しじはよだめ	265	だしよはじめ	325	だじはよしめ
26	よだしはめじ	86	よじはしめだ	146	しだよはめじ	206	しじはよめだ	266	だしよはめじ	326	だじはよめし
27	よだしじはめ	87	よじはだしめ	147	しだよじはめ	207	しじはだよめ	267	だしよじはめ	327	だじはしよめ
28	よだしじめは	88	よじはだめし	148	しだよじめは	208	しじはだめよ	268	だしよじめは	328	だじはしめよ
29	よだしめはじ	89	よじはめしだ	149	しだよめはじ	209	しじはめよだ	269	だしよめはじ	329	だじはめよし
30	よだしめじは	90	よじはめだし	150	しだよめじは	210	しじはめだよ	270	だしよめじは	330	だじはめしよ
31	よだはしじめ	91	よじめしだは	151	しだはよじめ	211	しじめよだは	271	だしはよじめ	331	だじめよしは
32	よだはしめじ	92	よじめしはだ	152	しだはよめじ	212	しじめよはだ	272	だしはよめじ	332	だじめよはし
33	よだはじしめ	93	よじめだしは	153	しだはじよめ	213	しじめだよは	273	だしはじよめ	333	だじめしよは
34	よだはじめし	94	よじめだはし	154	しだはじめよ	214	しじめだはよ	274	だしはじめよ	334	だじめしはよ
35	よだはめしじ	95	よじめはしだ	155	しだはめよじ	215	しじめはよだ	275	だしはめよじ	335	だじめはよし
36	よだはめじし	96	よじめはだし	156	しだはめじよ	216	しじめはだよ	276	だしはめじよ	336	だじめはしよ
37	よだじしはめ	97	よめしだはじ	157	しだじよはめ	217	しめよだはじ	277	だしじよはめ	337	だめよしはじ
38	よだじしめは	98	よめしだじは	158	しだじよめは	218	しめよだじは	278	だしじよめは	338	だめよしじは
39	よだじはしめ	99	よめしはだじ	159	しだじはよめ	219	しめよはだじ	279	だしじはよめ	339	だめよはしじ
40	よだじはめし	100	よめしはじだ	160	しだじはめよ	220	しめよはじだ	280	だしじはめよ	340	だめよはじし
41	よだじめしは	101	よめしじだは	161	しだじめよは	221	しめよじだは	281	だしじめよは	341	だめよじしは
42	よだじめはし	102	よめしじはだ	162	しだじめはよ	222	しめよじはだ	282	だしじめはよ	342	だめよじはし
43	よだめしはじ	103	よめだしはじ	163	しだめよはじ	223	しめだよはじ	283	だしめよはじ	343	だめしよはじ
44	よだめしじは	104	よめだしじは	164	しだめよじは	224	しめだよじは	284	だしめよじは	344	だめしよじは
45	よだめはしじ	105	よめだはしじ	165	しだめはよじ	225	しめだはよじ	285	だしめはよじ	345	だめしはよじ
46	よだめはじし	106	よめだはじし	166	しだめはじよ	226	しめだはじよ	286	だしめはじよ	346	だめしはじよ
47	よだめじしは	107	よめだじしは	167	しだめじよは	227	しめだじよは	287	だしめじよは	347	だめしじよは
48	よだめじはし	108	よめだじはし	168	しだめじはよ	228	しめだじはよ	288	だしめじはよ	348	だめしじはよ
49	よはしだじめ	109	よめはしだじ	169	しはよだじめ	229	しめはよだじ	289	だはよしじめ	349	だめはよしじ
50	よはしだめじ	110	よめはしじだ	170	しはよだめじ	230	しめはよじだ	290	だはよしめじ	350	だめはよじし
51	よはしじだめ	111	よめはだしじ	171	しはよじだめ	231	しめはだよじ	291	だはよじしめ	351	だめはしよじ
52	よはしじめだ	112	よめはだじし	172	しはよじめだ	232	しめはだじよ	292	だはよじめし	352	だめはしじよ
53	よはしめだじ	113	よめはじしだ	173	しはよめだじ	233	しめはじよだ	293	だはよめしじ	353	だめはじよし
54	よはしめじだ	114	よめはじだし	174	しはよめじだ	234	しめはじだよ	294	だはよめじし	354	だめはじしよ
55	よはだしじめ	115	よめじしだは	175	しはだよじめ	235	しめじよだは	295	だはしよじめ	355	だめじよしは
56	よはだしめじ	116	よめじしはだ	176	しはだよめじ	236	しめじよはだ	296	だはしよめじ	356	だめじよはし
57	よはだじしめ	117	よめじだしは	177	しはだじよめ	237	しめじだよは	297	だはしじよめ	357	だめじしよは
58	よはだじめし	118	よめじだはし	178	しはだじめよ	238	しめじだはよ	298	だはしじめよ	358	だめじしはよ
59	よはだめしじ	119	よめじはしだ	179	しはだめよじ	239	しめじはよだ	299	だはしめよじ	359	だめじはよし
60	よはだめじし	120	よめじはだし	180	しはだめじよ	240	しめじはだよ	300	だはしめじよ	360	だめじはしよ

361 はよしだじめ 421 はだじよしめ 481 じよしだはめ 541 じだはよしめ 601 めよしだはじ 661 めだはよしじ
362 はよしだめじ 422 はだじよめし 482 じよしだめは 542 じだはよめし 602 めよしだじは 662 めだはよじし
363 はよしじだめ 423 はだじしよめ 483 じよしはだめ 543 じだはしよめ 603 めよしはだじ 663 めだはしよじ
364 はよしじめだ 424 はだじしめよ 484 じよしはめだ 544 じだはしめよ 604 めよしはじだ 664 めだはしじよ
365 はよしめだじ 425 はだじめよし 485 じよしめだは 545 じだはめよし 605 めよしじだは 665 めだはじよし
366 はよしめじだ 426 はだじめしよ 486 じよしめはだ 546 じだはめしよ 606 めよしじはだ 666 めだはじしよ
367 はよだしじめ 427 はだめよしじ 487 じよだしはめ 547 じだめよしは 607 めよだしはじ 667 めだじよしは
368 はよだしめじ 428 はだめよじし 488 じよだしめは 548 じだめよはし 608 めよだしじは 668 めだじよはし
369 はよだじしめ 429 はだめしよじ 489 じよだはしめ 549 じだめしよは 609 めよだはしじ 669 めだじしよは
370 はよだじめし 430 はだめしじよ 490 じよだはめし 550 じだめしはよ 610 めよだはじし 670 めだじしはよ
371 はよだめしじ 431 はだめじよし 491 じよだめしは 551 じだめはよし 611 めよだじしは 671 めだじはよし
372 はよだめじし 432 はだめじしよ 492 じよだめはし 552 じだめはしよ 612 めよだじはし 672 めだじはしよ
373 はよじしだめ 433 はじよしだめ 493 じよはしだめ 553 じはよしだめ 613 めよはしだじ 673 めはよしだじ
374 はよじしめだ 434 はじよしめだ 494 じよはしめだ 554 じはよしめだ 614 めよはしじだ 674 めはよしじだ
375 はよじだしめ 435 はじよだしめ 495 じよはだしめ 555 じはよだしめ 615 めよはだしじ 675 めはよだしじ
376 はよじだめし 436 はじよだめし 496 じよはだめし 556 じはよだめし 616 めよはだじし 676 めはよだじし
377 はよじめしだ 437 はじよめしだ 497 じよはめしだ 557 じはよめしだ 617 めよはじしだ 677 めはよじしだ
378 はよじめだし 438 はじよめだし 498 じよはめだし 558 じはよめだし 618 めよはじだし 678 めはよじだし
379 はよめしだじ 439 はじしよだめ 499 じよめしだは 559 じはしよだめ 619 めよじしだは 679 めはしよだじ
380 はよめしじだ 440 はじしよめだ 500 じよめしはだ 560 じはしよめだ 620 めよじしはだ 680 めはしよじだ
381 はよめだしじ 441 はじしだよめ 501 じよめだしは 561 じはしだよめ 621 めよじだしは 681 めはしだよじ
382 はよめだじし 442 はじしだめよ 502 じよめだはし 562 じはしだめよ 622 めよじだはし 682 めはしだじよ
383 はよめじしだ 443 はじしめよだ 503 じよめはしだ 563 じはしめよだ 623 めよじはしだ 683 めはしじよだ
384 はよめじだし 444 はじしめだよ 504 じよめはだし 564 じはしめだよ 624 めよじはだし 684 めはしじだよ
385 はしよだじめ 445 はじだよしめ 505 じしよだはめ 565 じはだよしめ 625 めしよだはじ 685 めはだよしじ
386 はしよだめじ 446 はじだよめし 506 じしよだめは 566 じはだよめし 626 めしよだじは 686 めはだよじし
387 はしよじだめ 447 はじだしよめ 507 じしよはだめ 567 じはだしよめ 627 めしよはだじ 687 めはだしよじ
388 はしよじめだ 448 はじだしめよ 508 じしよはめだ 568 じはだしめよ 628 めしよはじだ 688 めはだしじよ
389 はしよめだじ 449 はじだめよし 509 じしよめだは 569 じはだめよし 629 めしよじだは 689 めはだじよし
390 はしよめじだ 450 はじだめしよ 510 じしよめはだ 570 じはだめしよ 630 めしよじはだ 690 めはだじしよ
391 はしだよじめ 451 はじめよしだ 511 じしだよはめ 571 じはめよしだ 631 めしだよはじ 691 めはじよしだ
392 はしだよめじ 452 はじめよだし 512 じしだよめは 572 じはめよだし 632 めしだよじは 692 めはじよだし
393 はしだじよめ 453 はじめしよだ 513 じしだはよめ 573 じはめしよだ 633 めしだはよじ 693 めはじしよだ
394 はしだじめよ 454 はじめしだよ 514 じしだはめよ 574 じはめしだよ 634 めしだはじよ 694 めはじしだよ
395 はしだめよじ 455 はじめだよし 515 じしだめよは 575 じはめだよし 635 めしだじよは 695 めはじだよし
396 はしだめじよ 456 はじめだしよ 516 じしだめはよ 576 じはめだしよ 636 めしだじはよ 696 めはじだしよ
397 はしじよだめ 457 はめよしだじ 517 じしはよだめ 577 じめよしだは 637 めしはよだじ 697 めじよしだは
398 はしじよめだ 458 はめよしじだ 518 じしはよめだ 578 じめよしはだ 638 めしはよじだ 698 めじよしはだ
399 はしじだよめ 459 はめよだしじ 519 じしはだよめ 579 じめよだしは 639 めしはだよじ 699 めじよだしは
400 はしじだめよ 460 はめよだじし 520 じしはだめよ 580 じめよだはし 640 めしはだじよ 700 めじよだはし
401 はしじめよだ 461 はめよじしだ 521 じしはめよだ 581 じめよはしだ 641 めしはじよだ 701 めじよはしだ
402 はしじめだよ 462 はめよじだし 522 じしはめだよ 582 じめよはだし 642 めしはじだよ 702 めじよはだし
403 はしめよだじ 463 はめしよだじ 523 じしめよだは 583 じめしよだは 643 めしじよだは 703 めじしよだは
404 はしめよじだ 464 はめしよじだ 524 じしめよはだ 584 じめしよはだ 644 めしじよはだ 704 めじしよはだ
405 はしめだよじ 465 はめしだよじ 525 じしめだよは 585 じめしだよは 645 めしじだよは 705 めじしだよは
406 はしめだじよ 466 はめしだじよ 526 じしめだはよ 586 じめしだはよ 646 めしじだはよ 706 めじしだはよ
407 はしめじよだ 467 はめしじよだ 527 じしめはよだ 587 じめしはよだ 647 めしじはよだ 707 めじしはよだ
408 はしめじだよ 468 はめしじだよ 528 じしめはだよ 588 じめしはだよ 648 めしじはだよ 708 めじしはだよ
409 はだよしじめ 469 はめだよしじ 529 じだよしはめ 589 じめだよしは 649 めだよしはじ 709 めじだよしは
410 はだよしめじ 470 はめだよじし 530 じだよしめは 590 じめだよはし 650 めだよしじは 710 めじだよしは
411 はだよじしめ 471 はめだしよじ 531 じだよはしめ 591 じめだしよは 651 めだよはしじ 711 めじだしよは
412 はだよじめし 472 はめだしじよ 532 じだよはめし 592 じめだしはよ 652 めだよはじし 712 めじだしはよ
413 はだよめしじ 473 はめだじよし 533 じだよめしは 593 じめだはよし 653 めだよじしは 713 めじだはよし
414 はだよめじし 474 はめだじしよ 534 じだよめはし 594 じめだはしよ 654 めだよじはし 714 めじだはしよ
415 はだしよじめ 475 はめじよしだ 535 じだしよはめ 595 じめはよしだ 655 めだしよはじ 715 めじはよしだ
416 はだしよめじ 476 はめじよだし 536 じだしよめは 596 じめはよだし 656 めだしよじは 716 めじはよだし
417 はだしじよめ 477 はめじしだよ 537 じだしはよめ 597 じめはしよだ 657 めだしはよじ 717 めじはしよだ
418 はだしじめよ 478 はめじしだよ 538 じだしはめよ 598 じめはしだよ 658 めだしはじよ 718 めじはしだよ
419 はだしめよじ 479 はめじだよし 539 じだしめよは 599 じめはだよし 659 めだしじよは 719 めじはだよし
420 はだしめじよ 480 はめじだしよ 540 じだしめはよ 600 じめはだしよ 660 めだしじはよ 720 めじはだしよ

2. 実行例

JKの実行例をいくつかあげる.

- (1) “FOOTBALL” は8文字で, “O”が2文字, “L”が2文字ある.
これを並べ換える順列の総数は,

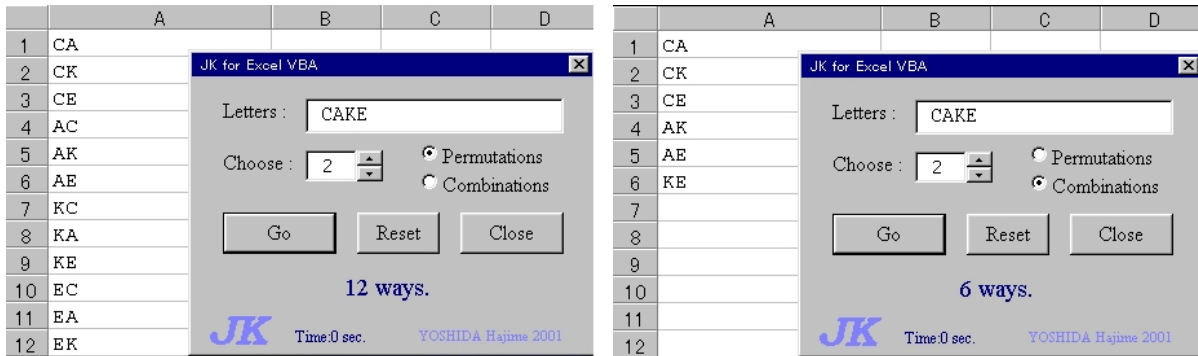
$$\frac{8!}{2! \times 2!} = 10080 \text{ (通り).}$$

JKは画面スクロールすることによって, これをすべて表示できる. 表示可能な最大値は, Windows版は174999通り, Excel版は65536通り(Excelに依存). 結果はテキストファイルに出力可能で, これをワープロソフト等で読み込める.

(右の実行画面はWindows版)



- (2) “CAKE” は4文字ですべて異なる. ここから2文字とると,
順列の総数は ${}_4P_2 = 12$, 組合せの総数は ${}_4C_2 = 6$.



(実行画面はExcel英語版)

- (3) Excel版には入力した文字を自動的に数えるシートが含まれ, このシートで階乗!, ${}_nP_r$, ${}_nC_r$ の計算ができる.



(実行画面はExcel版)

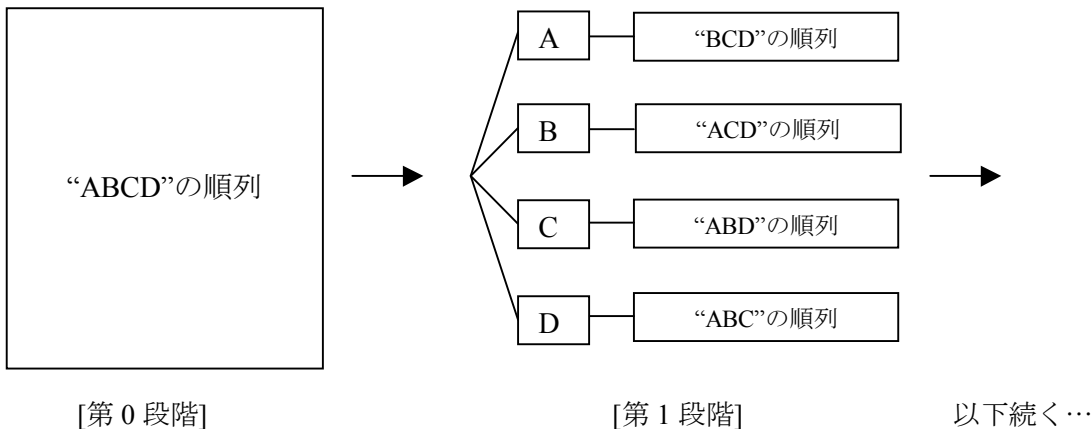
3. プログラムのアルゴリズムと樹形図

JK の主アルゴリズムには再帰処理を使っている。再帰処理はそれほど特別な考え方ではなく、たとえば、順列の樹形図をかき場合の説明にも便利である。だから、この説明は単にプログラムのできる教師向けだけのものではない。

“ABCD”の4文字を並べる順列の樹形図のかきかたを再帰処理の考え方で書いてみよう。

「ABCDの4文字を並べる順列の樹形図をかき」とは
 A,B,C,Dの各文字を書き出す
 各文字の後に残りの3文字を並べる順列の樹形図をかき
 以上

次のように階層的に樹形図がかかれるようすがわかるだろう。すべての段階をかいた、ページめくり式のポスターを発表時にご覧にいれる。



では、文字の順列をすべて書き出す処理のアルゴリズムを再帰で表してみよう。並べる文字が無くなった場合の処理を書き加えればよい。

「文字の順列をすべて書き出す」とは
 並べ換える文字が無になったら、
 それまでに並べた文字を並べ換えた結果のひとつとして書き出す
 まだ並べ終わっていない文字が残っていれば、
 まだ残っている文字について、1文字ずつ
 すでに並べ終わった文字のうしろに並べ、
 その並べた文字以外の残りの文字の順列をすべて書き出す
 以上.

これをそのままプログラムにすれば、順列を書き出すプログラムができ上がる。もちろん、再帰処理が可能な言語を選ぶ必要がある。**JK**の開発に使用した Microsoft Visual Basic および Excel に組み込まれている Visual Basic for Application (VBA) では再帰処理が使用できる。また、Logo などのリスト処理が可能な言語を使うと、「文字」の並べ換えばかりではなく「単語」の並べ換えも簡単にできる。

4. JK の利用について

JK は次の WEB ページからダウンロードできる。

高校数学 順列・組合せ 教材用ソフト **JK**

Ver3.0 for Windows & for Microsoft Excel

よしだ はじめ 作, 2001年7月11日
JK for Excel English Edition here



- ◆ JK は入力した文字の順列・組合せのパターンをすべて作り出すプログラムです。
- ◆ Windows 版では 174999 通り, Excel 版では 65536 通りまで対応します。
- ◆ 同じ文字を含む文字列にも対応します。
- ◆ 結果をテキストファイルに書き出すことができます。それをワープロソフト等で読み込んで印刷できます。
- ◆ Excel 版の Macintosh での動作は確認できません。
- ◆ JK は無料でご利用できます。

→ JK for Windows 説明書はこちらへ

- ◆ 著作権は作者にあります。利用の結果起こったことについて、作者はなんの責任も持ちません。特に、紙やプリンタのインク（トナー）のムダ使いには十分注意しましょう。(^-^)

- ◆ JK は Junretsu, Kumiawase の頭文字です。
Ver3.0 は, 1993 年発表の MS-DOS 版 Ver2.2 の改訂版です。
- ◆ Microsoft Visual Basic 5.0 で開発 (Excel 版は VBA)。
- ◆ 動作可能環境(一部調査中) Windows 版: Windows95 以降, NT4.0 以降. Excel 版: Excel97 以降.
(Windows, Macintosh 等は該当各社の商標または登録商標です.)

http://www.ne.jp/asahi/math.edu/ami/myprog/jk_inf.htm

ここから、ダウンロードできます。ファイルは LHA の圧縮形式です。
下のファイル名をクリックして、適当なフォルダへ保存してください。

名称	JK for Windows	JK for Excel
対象	Windows95 以降, NT4.0 以降	Excel97 以降
サイズ	約 2.5MB	約 95KB
ファイル名	jk3.lzh ←ダウンロード(010829 更新)	jkxl.lzh ←ダウンロード
セットアップ方法	適当なフォルダにコピーして解凍. setup.exe を実行. スタートアップ メニューに JK が登録される.	適当なフォルダにコピーして解凍. 順列組合.xls を開く.

(C) YOSHIDA Hajime, 2001 E-mail: cq2h-ysd@asahi-net.or.jp
更新情報をお知らせしますので、ダウンロードした方は、ご連絡ください。