指数関数の微分法と e の導入

—— 三省堂教科書の方法を GRAPES で実現する ——

よしだ　はじめ

（千葉県／関東＆東京地区協　　河合塾 COSMO コース講師）

2008 年 8 月 3 〜 5 日　 数学教育協議会 第 56 回全国研究大会

1　指数関数の微分法の導入

今はなき三省堂教科書『数学Ⅲ』では指数関数の微分法の導入を次のように扱っていました．

【『数学Ⅲ』改訂版 pp44-45, 三省堂 2000 年】

(1) $f(x) = a^x$ の導関数を定義にしたがって計算してみると，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ の値がわかれば，$f(x) = a^x$ の導関数が定まる．

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ の値は $f'(0)$ であり，これは $f(x) = a^x$ のグラフの $x = 0$ での接線の傾きである．

(3) a の値を変化させてグラフを見ると，$f'(0) = 1$ となる a の値が $2.5 < a < 3$ の範囲に存在するようだ．

(4) ちょうど $f'(0) = 1$ となる a の値を e と表すと，$(e^x)' = e^x$ となる．
$\cdots$

問題は上記 (3) です．教科書という書物の性質上，a の値をいろいろ変化させて，そのグラフを見るというわけにはいきません．ここはコンピュータの出番です．実は昔，このプログラムを BASIC で作ったことがありました．

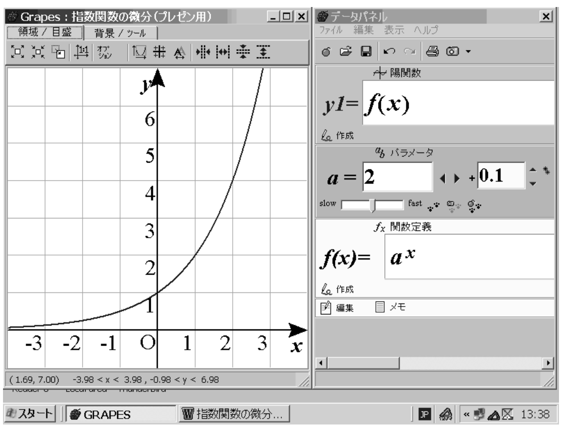
今回，しばらくぶりにこの部分を教えることになり，GRAPES（友田勝久氏・作，フリーソフト）を使いました．教室へは作り上げたものを持っていき，それを提示しましたが，基本の部分はあっという間にできてしまいます．

2　GRAPESによる作成と提示

GRAPES を起動し，表示領域を適当なものに設定します．指数関数 $y = a^x$ のグラフをかくので，範囲は $-4 \leqq x \leqq 4$, $-1 \leqq y \leqq 7$ くらいがよいでしょう．また，これにあわせて，目盛の間隔，文字の大きさ等も調整します．

まず，関数を定義します．データパネルの「関数定義」で $f(x)$ に a ^ x と入力します．これで，a をパラメータとする指数関数 $f(x) = a^x$ が定義できました．

データパネルの「陽関数」の作成で，$y1$ に $f(x)$ と入力します．a の初期値は 1 に設定されていますので，最初は直線 $y = 1$ が表示されますが，a の値を変化させると曲線に変わります．これで，$y = a^x$ のグラフができました．

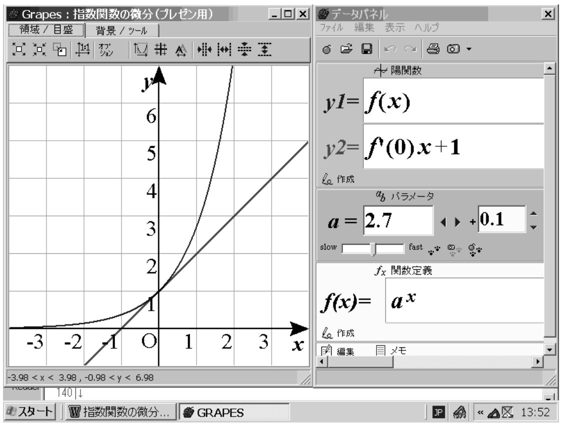


［画面 1］

次に，このグラフの $x = 0$ での接線をかきます．データパネルの「陽関数」の作成で，$y2$ に $f'(0)x + 1$ と入力します．もとの関数のグラフと

は色を変えておくとよいでしょう．

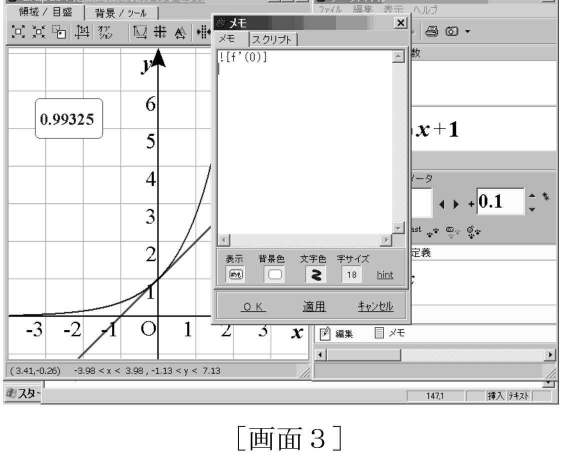
GRAPES はグラフの指定の範囲を拡大していくことができます．ですから，「どんどん拡大すると曲線は直線と区別がつかなくなる」ということも見せられるのですが，ここでは広域的に曲線が変わっていくところも見せたいので，接線を同時に表示させることにします．この状態で a の値を変化させると，グラフの格子をたよりにして，$a = 2.7$ で接線の傾きはほぼ 1 になることがわかります．



［画面２］

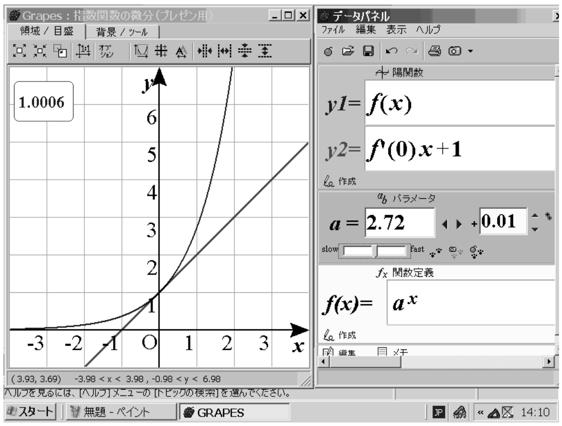
より正確に傾きを知るために，傾きの値 $f'(0)$ を画面に出します．データパネルのメモの「編集」をクリックすると，メモ編集画面が出ます（下画面３の中央のウインドウ）．そこへ ！{ f’(0) } と入力します．！ は次にくる式の値を表します．フォントサイズは適当に大きくしてください．

メモ領域がでて，$f'(0)$ の値が表示されているでしょう．メモ領域はドラッグしてグラフの空いているところ（左上あたり）へ移動することができます．



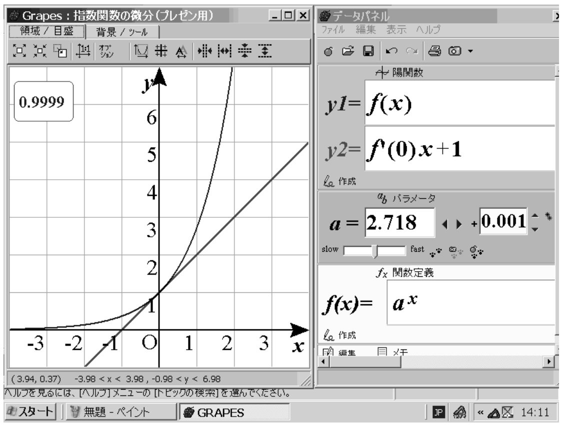
［画面３］

では，a の値をもう一桁小さく変化させます（小数第２位）．$2.71 < e < 2.72$ であることがわかります．



［画面４］

さらに，もう一桁小さくします（小数第３位）．$2.718 < e < 2.719$ であることがわかります．



［画面５］

GRAPES でパラメータの調整ができるのはこの桁までですが，ここまでで十分でしょう．

授業ではその後，関数電卓で e の近似値を計算しました．$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を $t = \dfrac{1}{h}$ として式変形し，$e \fallingdotseq \left(\dfrac{1}{t}+1\right)^t$ とします．そして，$t = 10, 100, 1000, 10000, \cdots$ のときの値を計算すると，しだいに $2.71828\cdots$ に近づくことが確認できます．

＊　＊　＊

このように，パラメータの細かい変化に対応したグラフを提示したり，そのときの接線の傾きの数値を表示することにより，三省堂教科書の趣旨をより反映できるものになったと思います．