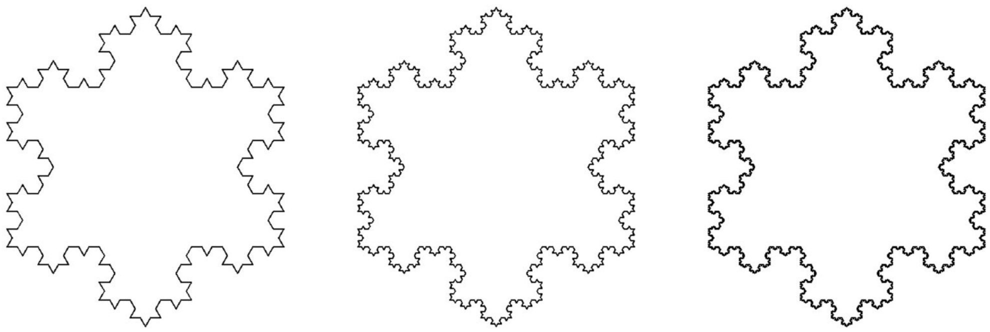
解説・活用

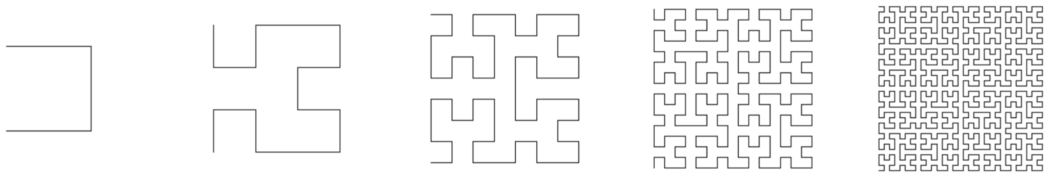
１つの線分に対してこの問題の「操作 M」を無限に繰り返してできる図形を**コッホ**[3]**曲線**（Koch curve）といい，正三角形に対して「操作 M」を無限に繰り返してできる図形を**コッホ 雪片**（せっぺん）（Koch snowflake）といいます.

実際には無限に繰り返した図はかけません．問題に示された図に続く T_3，T_4，T_5 を左から順にかいてみました．細かくなると尖った部分は判別しにくくなってしまいますが，これを無限に続けていった状態を想像しましょう.



大局的に眺めているうちは細かい折れ線は見えません．しかし，部分を拡大すると見えてきます.「想像力の目」で見てくださいね．拡大を続けると折れ線は同じように出現し，どんなに拡大しても滑らかにはなりません．部分がもとと同じ構造を持っているからです．一方，微積分の考え方は「拡大すると滑らかになる」というものでした．この点が異なります．これは「どちらが正しいか」という問題ではなく，対象となるものの構造が異なると理解してください．このような図形はコッホ曲線の他にもいろいろあります.

・ヒルベルト[4] 曲線（に至る図形）．無限に続けると正方形を埋め尽くす.



・メンガー[5] のスポンジ（に至る立体）.

[a]

[a]By Niabot (投稿者自身による作品) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0)], via Wikimedia Commons

[3]Helge von Koch（1870−1924）スウェーデンの数学者.

これらは人為的に定義された図形ですが，同様の構造を持つ現象は自然界にも現れます．植物の枝の構造や動物の肺の内部構造などはほぼ同形で徐々に小さくなっていきます（無限に続くわけではありませんが）．また，海岸線や国境線の長さは細かいものさしで測るほど細部まで測れるようになり，大きな値がでます．**ブノワ・マンデルブロ**[6] は 1975 年，これらを統一した概念でまとめ，**フラクタル**[7] と名付けました．フラクタルは物理学，生物学などの自然科学や経済学などに応用されます．

フラクタルの登場はコンピュータの発展時期と重なりました．コンピュータの利用によってフラクタルな図形は表現しやすくなりました．この稿のコッホ雪片やヒルベルト曲線の図はコンピュータを使って自動的に描かせたものです．

さて，この問題は面積と周の長さの極限を調べたところで終わっています．しかし，それではこの問題の意図，出題者が伝えたいと思われることには到達していません．それは (2) と (3) の結果から結論でき，フラクタルな図形の性質を表すものです．

面積は有限なのに，周の長さは無限大の図形が定義できる．

ちなみに，最初の状態の面積 S_0 と (2) の結果 $\lim_{n\to\infty} S_n$ とを比較すると，

$$S_0 : \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{2\sqrt{3}}{5} = 5 : 8 = 1 : 1.6$$

と 1.6 倍にしかなっていません．

「理解」とともに「鑑賞」あるいは「感じる」範疇の内容といえるでしょう．国語で文学作品を鑑賞するように，数学の作品も鑑賞してください．

参考

(1) 『目で見る数学』pp.80-81，ジョニー・ボール 著，山崎直子 訳，さえら書房，2006
小学校高学年以上（おとなも含む）向けの数学項目概説書．

(2) 『数学活用』pp.34-35，根上生也 編，啓林館，2013
今年度から使われ始めた新しい高校教科書の 1 冊で，「新しい幾何学」の項目のなかにフラクタルの記載があります．

(1)，(2) ともこの問題を解いたようにきちんと計算しているわけではありません．「数学Ⅲ」まで学んだことで解決できたのです．

(3) 『フラクタル幾何学』（上・下），B・マンデルブロ 著，広中平祐 監訳，ちくま学芸文庫，2011 （原著初版 1977，増補改訂版翻訳初版 1985）
元祖マンデルブロの著作．文庫本でも上下 2 冊で 3000 円を超える大作．図書館には文庫化される以前の大判の本もあるかもしれません．

---

[4]David Hilbert（1862−1943）20 世紀初頭を代表するドイツの，というより世界的な数学者．

[5]Karl Menger（1902−1985）オーストリア→アメリカの数学者．

[6]Benoît Mandelbrot（1924−2010）数学者で自然科学者で経済学者．ポーランド生まれのユダヤ系．少年時代にパリに移住し，その後アメリカへ．

[7]**fractal** は fraction（分数）に由来する語です．線は 1 次元の図形，面は 2 次元の図形というように次元は整数値で考えてきました．これを拡張して，フラクタルな図形は分数（無理数も含めて）の次元をもつ図形と考えます．