解答例

(1)　1回の操作について，辺の数は4倍になり，各辺の長さは$\dfrac{1}{3}$になる．

すなわち，$a_{n+1}=4a_n$，$l_{n+1}=\dfrac{1}{3}l_n$であり，初期値は$a_0=3$，$l_0=1$である．

よって，$a_n=3\cdot 4^n$，$l_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$．

(2)　T_nからT_{n+1}への1回の操作で増える面積は，1辺の長さが$\dfrac{l_n}{3}$の正三角形の面積a_n個分である．すなわち，

$$S_{n+1}=S_n+a_n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{3}\cdot\frac{l_n}{3}\sin 60^\circ\right)=S_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a_n\cdot(l_n)^2$$

と表せる．これと(1)の結果から，

$$S_{n+1}=S_n+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot(3\cdot 4^n)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=S_n+\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 4^n\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n\ =S_n+\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

また，$S_0=\dfrac{1}{2}\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$である．よって，$n\geqq 1$について，

$$S_n=S_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\dfrac{4}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\cdot\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

となる．これは$n=0$でも成り立っている．

$n\to\infty$のとき，$\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\to 0$だから，$S_n$は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{5\sqrt{3}}{20}+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{8\sqrt{3}}{20}=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

(3)　周の長さは$L_n=a_n\cdot l_n$であるから，(1)より，1回の操作で$4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$倍になる．すなわち，$L_n=3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$と表せる等比数列である．

公比は$\dfrac{4}{3}$で，1より大きいから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n=\infty$である．