解説・活用

物理などの応用分野では三角関数の変数として，ひとつの文字 t ではなく，π といっしょに $\cos(\pi t)$ のように使用することがよくあります．これは周期を考慮してのことで，$\cos(\pi t)$ とすれば t が 0〜2 で，$\cos(2\pi t)$ とすれば t が 0〜1 で一周します．このような表現にも慣れましょう．

この問題の曲線を極方程式 $r = f(\theta)$ で表してみます．

$r^2 = x^2 + y^2$ より，

$$r^2 = e^{2t}\cos^2(\pi t) + e^{2t}\sin^2(\pi t) = e^{2t}\left(\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t)\right) = e^{2t}.$$

$r > 0$，$e^t > 0$ だから，$r = e^t$．$\pi t = \theta$ とおくと，$t = \dfrac{\theta}{\pi}$．

よって，$r = e^{\frac{\theta}{\pi}}$．　……③

このように，わりと簡潔な式になりました．

③式は一般に，

$$r = ae^{b\theta} \quad （ただし, a > 0,\ b \neq 0） \quad ……④$$

と表せ，また，両辺の対数をとって変形すると，

$$\theta = \frac{1}{b}\log\left(\frac{r}{a}\right)$$

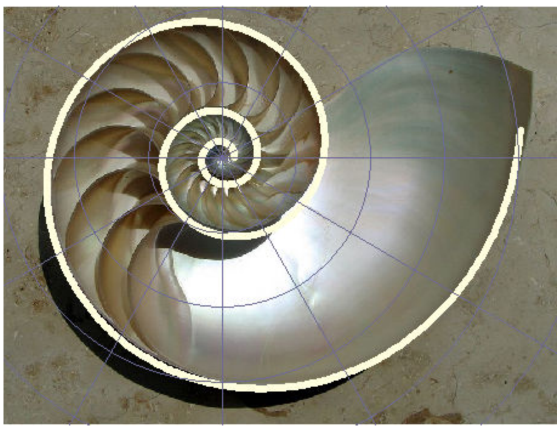
となります．つまり，角 θ と半径 r の対数が正比例します．

④の形の式で表される曲線を**対数らせん**（対数渦巻線）といいます．b の正負によって巻きの向きが変わります．

対数らせんは自然界にたびたび現れます．右の写真はオウム貝です．他の貝類や動物の角などにも現れます．また，台風の渦巻きの形もそうです．

右の写真は，④式で，$a = 0.94$，$b = 0.17$ としてグラフを描き，重ね合わせたものです．

オウム貝（写真は Wikipedia より）[2]



$r = 0.94\, e^{0.17\theta}$

※描画ソフトは `Grapes` を使用．画像ファイルと重ね合わせできます．

[2]This Wikipedia and Wikimedia Commons image is from the user Chris 73 and is freely available at //commons.wikimedia.org/wiki/File:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg under the creative commons cc-by-sa 3.0 license.