解答例

(1)　速度は速度ベクトルとして $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と表せる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^t\cos(\pi t) - e^t\pi\sin(\pi t) = e^t\left(\cos(\pi t) - \pi\sin(\pi t)\right) & \cdots\cdots \text{①} \\ \dfrac{dy}{dt} = e^t\sin(\pi t) + e^t\pi\cos(\pi t) = e^t\left(\sin(\pi t) + \pi\cos(\pi t)\right) & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

であるから，$t=1$ のとき，

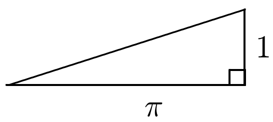
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e(\cos\pi - \pi\sin\pi) = e(-1-0) = -e \\ \dfrac{dy}{dt} = e(\sin\pi + \pi\cos\pi) = e(0-\pi) = -\pi e \end{cases}$$

すなわち，点 P の速度は $(-e,\ -\pi e)$.

(2)　①式より，$e^t > 0$ だから，$\cos(\pi t) - \pi\sin(\pi t) = 0$ となる $t = t_0$ を求める．

$\cos(\pi t) = \pi\sin(\pi t)$ より，$\dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} = \pi$,

すなわち，$\tan(\pi t_0) = \dfrac{1}{\pi}$.



よって，$\sin(\pi t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}$,　$\cos(\pi t_0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$.

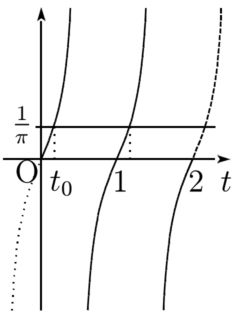
(3)　$0 < t \leqq 2$ より，$0 < \pi t \leqq 2\pi$.

$\tan(\pi t)$ について，$0 < t \leqq 2$ では

$$\tan(\pi t_0) = \tan(\pi t_0 + \pi) = \tan\left(\pi(t_0+1)\right) = \frac{1}{\pi}$$

も成り立つ．

よって，求める時刻は，$t = t_0$ および $t = t_0 + 1$.



(4)　②式より，(2) と同様に $\sin(\pi t) + \pi\cos(\pi t) = 0$ となる t を求める．

$\sin(\pi t) = -\pi\cos(\pi t)$ より，$\dfrac{\sin(\pi t)}{\cos(\pi t)} = -\pi$，すなわち $\tan(\pi t) = -\pi$.

(2) より，$\tan(\pi t_0) = \dfrac{1}{\pi}$ であったから，

$$\tan(\pi t) = -\frac{1}{\tan(\pi t_0)} = \tan\left(\pi t_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\pi\left(t_0 + \frac{1}{2}\right)\right).$$

$0 < t \leqq 2$ では，$\tan(\pi t) = \tan\left(\pi t_0 + \dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \tan\left(\pi\left(t_0 + \dfrac{3}{2}\right)\right)$ も該当する．

よって，求める時刻は $t = t_0 + \dfrac{1}{2}$ および $t = t_0 + \dfrac{3}{2}$.

(5)　時刻 t における点 P を $\mathrm{P}(t)$ と表す．

$\mathrm{P}(t_0)$，$\mathrm{P}(t_0+1)$ は直線 $y=\dfrac{1}{\pi}x$ との交点で，ここでの接線は y 軸に平行．

$\mathrm{P}(t_0+\frac{1}{2})$，$\mathrm{P}(t_0+\frac{3}{2})$ は直線 $y=-\pi x$ との交点で，ここでの接線は x 軸に平行．

この曲線と座標軸との交点は次の通り．

$$\mathrm{P}(0)=(1,0),\quad \mathrm{P}(\tfrac{1}{2})=(0,\sqrt{e}),\quad \mathrm{P}(1)=(-e,0),\quad \mathrm{P}(\tfrac{3}{2})=(0,-e\sqrt{e}),\quad \mathrm{P}(2)=(e^2,0).$$

概算すると，$e \fallingdotseq 2.7$ より，$\sqrt{e} \fallingdotseq 1.6$，$e\sqrt{e} \fallingdotseq 4.3$，$e^2 \fallingdotseq 7.3$．

これらから曲線の概形が描ける．